

電気学会技術者教育委員会パワーエレクトロニクス教育 WG  
パワエレ・セミナー「永久磁石同期電動機駆動の基礎」

2013年3月12日(火)13:00~17:00

於：青山学院大学相模原キャンパス L 棟 L-402 教室

## 主な内容

### 1. はじめに：

本セミナーの概要、位置センサ（ABZ エンコーダ）を用いた永久磁石同期電動機可変速駆動システムの基本的な構成について説明。

### 2. 空間ベクトルと三相/ $dq$ 変換：

空間ベクトルと三相/ $\alpha\beta$ 変換、 $\alpha\beta/dq$ 変換の考え方を説明。

### 3. 電動機モデルの導出：

$dq$ 座標での電圧・電流方程式、機械系の運動方程式から、電動機モデル（基本式）を導出。

### 4. 三相電圧形インバータの PWM 制御：

三相電圧形インバータの PWM 制御について空間ベクトルを用いて説明。  
三角波比較方式でも空間ベクトル変調と同じ性能が得られる手法（中間電圧1/2重畳法）を紹介。

### 5. 制御系のゲイン設計：

非干渉制御など電流制御系の考え方、インバータの制御遅れの影響と対策（遅れを考慮した制御法）など、制御系のゲイン設計法を含め説明。

### 6. 位置および速度の計算法：

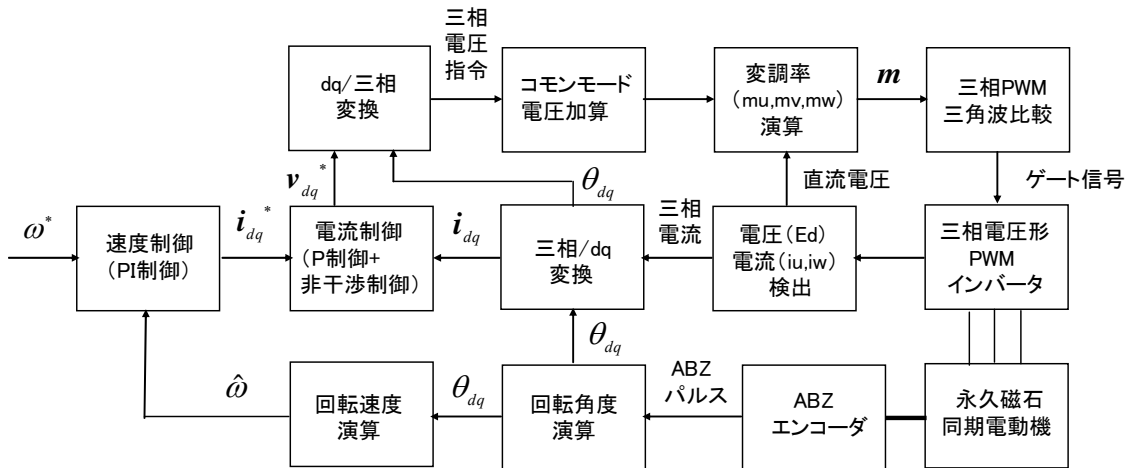
エンコーダの ABZ 信号から位置を決める手法、位置データより速度を推定する手法の考え方を説明。

### 7. アンケート：

基礎知識（これまでの学習内容）の状況、セミナーの内容やレベルについて、資料や説明方法について、今後開催を希望するテーマなど

# 1. はじめに

## 永久磁石同期電動機の可変速駆動システムの構成



### ○主なハードウェア

電動機 (ABZ エンコーダ付)

インバータ (電流センサおよび直流電圧センサ付)

### ○制御はワンチップマイコン (高性能、低価格)

(多機能 : ABZ エンコーダ入力、AD コンバータ、PWM 機能)

○基本的には電流制御など、全ての機能を制御プログラムで実現。

○プログラミングのためには原理を確実に理解しておく必要あり。

○制御系の設計には定量的な検討が不可欠。

○このセミナーでは基本的な考え方、具体的な計算方法を解説、

「制御系設計の基礎」⇒ 数式が多くなるがご容赦を

## 2. 空間ベクトルと三相/dq変換

### 空間ベクトルとは

○基本式（三相/αβ変換）

$$\text{空間ベクトルの定義} \quad \mathbf{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( i_u + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot i_v + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cdot i_w \right)$$

一般（零相分がある場合）の取り扱い

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = A^T = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

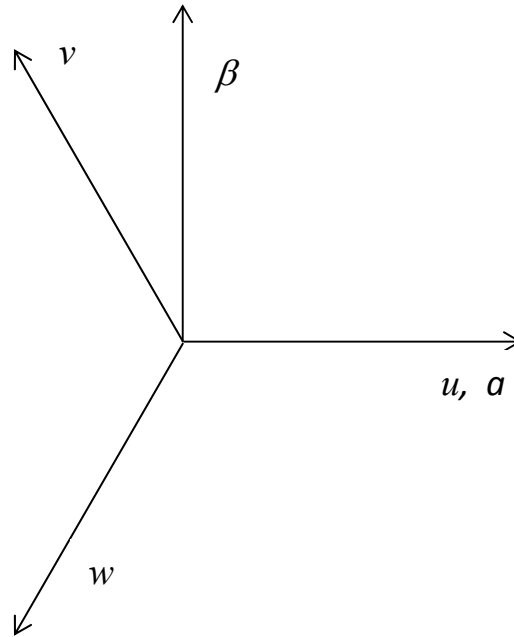
三相3線式では  $i_u + i_v + i_w = 0$  ( $i_0 = 0$ ) であり、

$i_\alpha, i_\beta$  だけを考え、複素数で表示可能

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta} = i_\alpha + j i_\beta$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

## uvw, $\alpha \beta$ の座標軸の関係



注1：複素数  $1$ 、 $e^{j\frac{2\pi}{3}}$ 、 $e^{j\frac{4\pi}{3}}$  は各相の固定子巻線（正弦波分布を仮定）に正の電流を流した場合にギャップの起磁力（回転子から固定子に向かう方向を正とする）が最大となる方向を表すもので、三相交流で良く使われるフェーズとは異なる。

注2：例えば、三相電流のフェーズ  $\dot{I}_u = I$ 、 $\dot{I}_v = Ie^{-j\frac{2\pi}{3}}$ 、 $\dot{I}_w = Ie^{-j\frac{4\pi}{3}}$  は正弦波波形の実効値と位相を複素数で表したものであり、それぞれ、 $i_u = \sqrt{2}I \cos(\omega t)$ 、 $i_v = \sqrt{2}I \cos(\omega t - 2\pi/3)$ 、 $i_w = \sqrt{2}I \cos(\omega t - 4\pi/3)$  に対応するものである。

注3：交流フェーズは角周波数  $\omega$  が一定の正弦波のみ考えるのに対し、空間ベクトルでの三相電圧・電流は瞬時値（高調波を含む任意の波形）を考える。ただし、三相電流あるいは三相電圧の合計は零とする。

注4：三相電流あるいは三相電圧にコモンモード成分が含まれていても、

$$1 + e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\frac{4\pi}{3}} = 0 \quad \text{であることから、空間ベクトルには反映されない。}$$

○空間ベクトル（複素数）の内積

複素数を単位ベクトルを1およびjとしたベクトルと考え、内積（演算子を●で表す）を計算する。

基本

$$\mathbf{x} = a + jb = xe^{j\alpha}, \quad \mathbf{y} = c + jd = ye^{j\beta}$$

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = ac + bd = xy \cos(\alpha - \beta)$$

大切な関係式

$$1 \bullet 1 = e^{j\frac{2\pi}{3}} \bullet e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\frac{4\pi}{3}} \bullet e^{j\frac{4\pi}{3}} = 1$$

$$1 \bullet e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\frac{2\pi}{3}} \bullet e^{j\frac{4\pi}{3}} = 1 \bullet e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \bullet \mathbf{z} = \mathbf{x} \bullet \mathbf{z} + \mathbf{y} \bullet \mathbf{z}$$

これらの関係を用いると

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta} \bullet 1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( i_u + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot i_v + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cdot i_w \right) \bullet 1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( i_u - \frac{1}{2}(i_v + i_w) \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} i_u$$

$$\Rightarrow i_u = \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{i}_{\alpha\beta} \bullet 1) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}(\mathbf{i}_{\alpha\beta})$$

同様に

$$i_v = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \mathbf{i}_{\alpha\beta} \bullet e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re} \left( \mathbf{i}_{\alpha\beta} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right), \quad i_w = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re} \left( \mathbf{i}_{\alpha\beta} e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right)$$

○電圧・電流とも同じ変換式に従う。

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} i_u + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot i_v + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cdot i_w \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} v_u + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot v_v + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cdot v_w \\ \vdots \end{pmatrix}$$

○三相の瞬時電力は電圧ベクトルと電流ベクトルの内積

$$\begin{aligned} p(t) &= \mathbf{v}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{i}_{\alpha\beta} \\ &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} v_u + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot v_v + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cdot v_w \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_u + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot i_v + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cdot i_w \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3} \left[ v_u \left( i_u - \frac{1}{2} i_v - \frac{1}{2} i_w \right) + v_v \left( i_v - \frac{1}{2} i_w - \frac{1}{2} i_u \right) + v_w \left( i_w - \frac{1}{2} i_u - \frac{1}{2} i_v \right) \right] \\ &= v_u i_u + v_v i_v + v_w i_w \end{aligned}$$

注5： $\alpha\beta$ 変換の係数 $\sqrt{2/3}$ は絶対変換（変換の前後で電力が変化しない）となるように選んだ結果である。即ち、電圧と電流が同じ変換式に従い、三相全体の電力が電圧ベクトルと電流ベクトルの内積で簡単に計算できるように選んだ結果である。

注6：三相電流を次式で与えると、

$$i_u = \sqrt{2}I \cos(\omega t), \quad i_v = \sqrt{2}I \cos(\omega t - 2\pi/3), \quad i_w = \sqrt{2}I \cos(\omega t - 4\pi/3)$$

対応する空間ベクトルは  $\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{3}I e^{j\omega t}$  となる。即ち、空間ベクトル

の大きさは線電流の実効値の $\sqrt{3}$ となる。電圧の場合は線間電圧実効値。

## 同期回転座標(dq 座標)とは

回転磁界に同期して回転する dq 座標（同期回転座標）から見ると、電圧・電流の空間ベクトルが静止（直流）して見えるため解析が簡単となる。

○基本式（ $\alpha \beta$  / dq 変換）

$$\mathbf{i}_{dq} = e^{-j\omega t} \mathbf{i}_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{v}_{dq} = e^{-j\omega t} \mathbf{v}_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \mathbf{i}_{\alpha\beta} = e^{j\omega t} \mathbf{i}_{dq}, \quad \mathbf{v}_{\alpha\beta} = e^{j\omega t} \mathbf{v}_{dq}$$

ただし、 $\alpha$  軸に対する d 軸の角度を  $\theta = \omega t$  とする。一例として

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{3}I e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{i}_{dq} = e^{-j\omega t} \mathbf{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{3}I$$

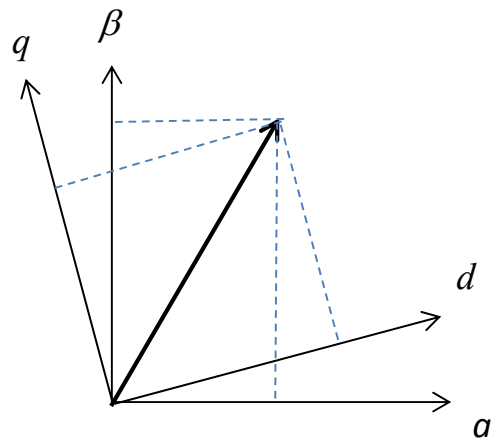
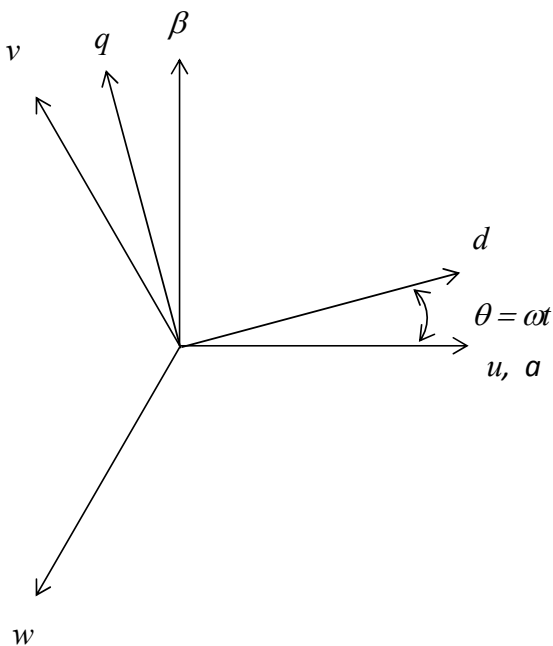
$$i_u = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}(\mathbf{i}_{\alpha\beta}) = \sqrt{2}I \cos(\omega t),$$

$$i_v = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}(\mathbf{i}_{\alpha\beta} e^{-j2\pi/3}) = \sqrt{2}I \cos(\omega t - 2\pi/3)$$

$$i_w = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}(\mathbf{i}_{\alpha\beta} e^{-j4\pi/3}) = \sqrt{2}I \cos(\omega t - 4\pi/3)$$

dq 軸、 $\alpha \beta$  軸、三相の関係

dq 軸および  $\alpha \beta$  軸から見た空間ベクトルの成分



注1：回転する  $\mathbf{i}_{\alpha\beta}, \mathbf{v}_{\alpha\beta}$  に  $e^{-j\omega t}$  を乗ずると静止した  $\mathbf{i}_{dq}, \mathbf{v}_{dq}$  に変換され、逆に、静止した  $\mathbf{i}_{dq}, \mathbf{v}_{dq}$  に  $e^{j\omega t}$  を乗ずると回転する  $\mathbf{i}_{\alpha\beta}, \mathbf{v}_{\alpha\beta}$  に変換されると考えないと忘れない。

注2：座標軸の動きとその座標から見えるベクトルの動きは逆になることに注意。同じ空間ベクトルであっても、回転している dq 座標から見ると静止したベクトル  $\mathbf{i}_{dq}, \mathbf{v}_{dq}$  となり、静止した  $\alpha\beta$  座標から見ると回転するベクトル  $\mathbf{i}_{\alpha\beta}, \mathbf{v}_{\alpha\beta}$  となる。

注3：同様に、u 相軸の方向に比べ、v 相軸の方向は  $2\pi/3$  だけ空間位相が進んでおり、w 相軸の方向は  $4\pi/3$  だけ空間位相が進んでいるが、回転する空間ベクトル  $\mathbf{i}_{\alpha\beta}$  を各軸から見た正弦波電流波形を比較すると、 $i_u$  に比べ、 $i_v$  は  $2\pi/3$  だけ位相が遅れており、 $i_w$  は  $4\pi/3$  だけ位相が遅れている。

注4：複素数を用いて空間ベクトルを表現すると、回転座標変換を簡単に表現することができる。行列を用いると分かりにくい。逆行列も単なる除算となる。

$$\mathbf{i}_{dq} = e^{-j\omega t} \mathbf{i}_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta} = e^{j\omega t} \mathbf{i}_{dq} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{e^{-j\omega t}} = e^{j\omega t} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$



### 3. 電動機モデルの導出

#### 永久磁石同期電動機の基本式

○三相を1つの式で表現 ( $i_u + i_v + i_w = 0$  とする)

$$v_u = ri_u + p(l + M)i_u - \frac{1}{2}pM(i_v + i_w) + e_u$$

$$v_v = ri_v + p(l + M)i_v - \frac{1}{2}pM(i_w + i_u) + e_v$$

$$v_w = ri_w + p(l + M)i_w - \frac{1}{2}pM(i_u + i_v) + e_w$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_{\alpha\beta} = r\mathbf{i}_{\alpha\beta} + p\left(l + \frac{3}{2}M\right)\mathbf{i}_{\alpha\beta} + \mathbf{e}_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_{\alpha\beta} = r\mathbf{i}_{\alpha\beta} + pL\mathbf{i}_{\alpha\beta} + \mathbf{e}_{\alpha\beta}$$

$$\text{ただし、 } p = \frac{d}{dt}, \quad L = l + \frac{3}{2}M$$

注5 : 相間の相互誘導により、各相の有効インダクタンス  $M$  は  $3/2$  倍されて  $L$  にあらわれる。

○dq 軸での電圧・電流方程式

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} = r\mathbf{i}_{\alpha\beta} + p(L\mathbf{i}_{\alpha\beta}) + \mathbf{e}_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \left(e^{j\omega t} \mathbf{v}_{dq}\right) = r\left(e^{j\omega t} \mathbf{i}_{dq}\right) + p\left(L e^{j\omega t} \mathbf{i}_{dq}\right) + \left(e^{j\omega t} \mathbf{e}_{dq}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_{dq} = e^{-j\omega t} r\left(e^{j\omega t} \mathbf{i}_{dq}\right) + e^{-j\omega t} p\left(L e^{j\omega t} \mathbf{i}_{dq}\right) + e^{-j\omega t} \left(e^{j\omega t} \mathbf{e}_{dq}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_{dq} = r\mathbf{i}_{dq} + (p + j\omega)(L\mathbf{i}_{dq}) + \mathbf{e}_{dq}$$

結果としては、 $\alpha\beta \Rightarrow dq$ ,  $p \Rightarrow (p + j\omega)$  とすればよい。

また、永久磁石による磁束を  $\phi_m$  とすると、 $\mathbf{e}_{dq} = j\omega\phi_m$  である。

○突極形 (IPM など) の場合は dq 軸でインダクタンスが異なることを考慮。

$$\mathbf{v}_{dq} = r\mathbf{i}_{dq} + (p + j\omega)(L_d i_d + jL_q i_q) + j\omega\phi_m$$

dq 軸の成分に分解すると

$$v_d + jv_q = r(i_d + ji_q) + (p + j\omega)(L_d i_d + jL_q i_q) + j\omega\phi_m$$

$$\Rightarrow v_d = ri_d + p(L_d i_d) - \omega L_q i_q$$

$$v_q = ri_q + \omega L_d i_d + p(L_q i_q) + \omega\phi_m$$

○参考 突極形の場合の  $\alpha\beta$  軸での電圧電流方程式は複雑な関係式となる。

dq 軸での関係式を  $\alpha\beta$  軸での関係式に変換してみる。

$$\begin{aligned} (e^{-j\omega t} \mathbf{v}_{\alpha\beta}) &= r(e^{-j\omega t} \mathbf{i}_{\alpha\beta}) \\ &+ (p + j\omega) \left[ L_d \operatorname{Re}(e^{-j\omega t} \mathbf{i}_{\alpha\beta}) + jL_q \operatorname{Im}(e^{-j\omega t} \mathbf{i}_{\alpha\beta}) \right] + e^{-j\omega t} \mathbf{e}_{\alpha\beta} \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{-j\omega t} \mathbf{v}_{\alpha\beta}) &= r(e^{-j\omega t} \mathbf{i}_{\alpha\beta}) + (p + j\omega) \frac{L_d}{2} (e^{-j\omega t} (i_\alpha + ji_\beta) + e^{j\omega t} (i_\alpha - ji_\beta)) \\ &+ (p + j\omega) \frac{L_q}{2} (e^{-j\omega t} (i_\alpha + ji_\beta) - e^{j\omega t} (i_\alpha - ji_\beta)) + e^{-j\omega t} \mathbf{e}_{\alpha\beta} \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} = r\mathbf{i}_{\alpha\beta} + \mathbf{e}_{\alpha\beta} + p \left[ \frac{L_d + L_q}{2} (i_\alpha + ji_\beta) + \frac{L_d - L_q}{2} e^{j2\omega t} (i_\alpha - ji_\beta) \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \\ \mathbf{v}_{\alpha\beta} &= r\mathbf{i}_{\alpha\beta} + \mathbf{e}_{\alpha\beta} + p \left[ \left( \frac{L_d + L_q}{2} + \frac{L_d - L_q}{2} e^{j2\omega t} \right) i_\alpha \right] \\ &+ p \left[ \left( \frac{L_d + L_q}{2} - \frac{L_d - L_q}{2} e^{j2\omega t} \right) (ji_\beta) \right] \end{aligned}$$

実部および虚部をとり、 $\alpha$  軸と  $\beta$  軸での関係に直すと、

$$v_\alpha = ri_\alpha + e_\alpha + \frac{L_d + L_q}{2} pi_\alpha + \frac{L_d - L_q}{2} p[i_\alpha \cos(2\omega t) + i_\beta \sin(2\omega t)]$$

$$v_\beta = ri_\beta + e_\beta + \frac{L_d + L_q}{2} pi_\beta + \frac{L_d - L_q}{2} p[i_\alpha \sin(2\omega t) - i_\beta \cos(2\omega t)]$$

行列の形に変形すると

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_\alpha \\ e_\beta \end{bmatrix} \\ + \frac{L_d + L_q}{2} p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \frac{L_d - L_q}{2} p \begin{bmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

右辺第 4 項目が突極性を考慮する項である。 $\omega t = 0$  とすると、 $\alpha$  軸が  $d$  軸に、 $\beta$  軸が  $q$  軸と一致することから、上式は

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_\alpha \\ e_\beta \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

となり、軸間の相互インダクタンスは零となる。

一方、 $\omega t = \pi/4$  とすると、 $\alpha$   $\beta$  軸ともに  $d$  軸と  $q$  軸の中間に位置するため、自己インダクタンスは等しくなるが、相互インダクタンスが表れる。

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_\alpha \\ e_\beta \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_0 & L_1 \\ L_1 & L_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}$$

where

$$L_0 = \frac{L_d + L_q}{2}, \quad L_1 = \frac{L_d - L_q}{2}$$

以上の結果より、突極形（IPM など）の場合は  $dq$  軸で考えるのが適切。

○空間ベクトルを用いて、突極形同期電動機の入力電力を計算してみる。

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \mathbf{v}_{\alpha\beta} \bullet \mathbf{i}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_{dq} \bullet \mathbf{i}_{dq} = v_d i_d + v_q i_q \\
 &= (r i_d + p(L_d i_d) - \omega L_q i_q) i_d + (r i_q + \omega L_d i_d + p(L_q i_q) + \omega \phi_m) i_q \\
 &= r(i_d^2 + i_q^2) + p\left(\frac{1}{2} L_d i_d^2 + \frac{1}{2} L_q i_q^2\right) + \omega(\phi_m - (L_q - L_d) i_d) i_q
 \end{aligned}$$

第1項は銅損、第2項は磁気エネルギーの変化、第3項が出力  
従って、極対数を1とすると、モータの発生トルクは

$$\tau_M = \phi_m i_q - (L_q - L_d) i_d i_q$$

○電流の大きさ  $|\mathbf{i}_{\alpha\beta}| = |\mathbf{i}_{dq}|$  が同じ条件で、トルクを最大とする  $i_d$ ,  $i_q$  の関係は  
ラグランジュの未定乗数法を用いて求めることができる。

$$L(i_d, i_q) = \phi_m i_q - (L_q - L_d) i_d i_q + k(i_d^2 + i_q^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial i_d} L(i_d, i_q) = -(L_q - L_d) i_q + 2k i_d = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial i_q} L(i_d, i_q) = \phi_m - (L_q - L_d) i_d + 2k i_q = 0$$

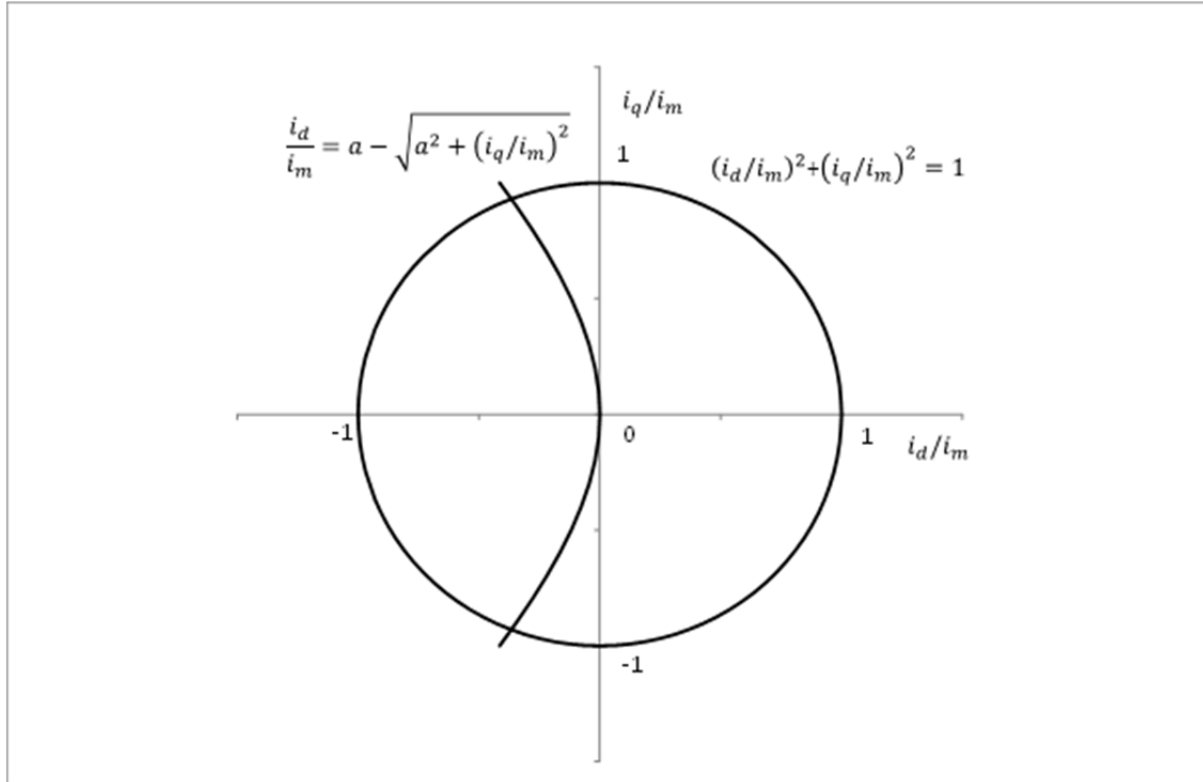
未定係数  $k$  を消去すると、

$$\phi_m i_d - (L_q - L_d) i_d^2 + (L_q - L_d) i_q^2 = 0$$

整理すると

$$\begin{aligned}
 (i_d/i_m - a)^2 - (i_q/i_m)^2 &= a^2 \\
 \Rightarrow i_d/i_m &= a - \sqrt{a^2 + (i_q/i_m)^2} \quad \text{where} \quad a = \frac{\phi_m}{2(L_q - L_d) i_m}
 \end{aligned}$$

このパターンに沿って電流を制御すると、同じ電流でも大きなトルクを発生  
できる。ただし、電流ベクトルの大きさ  $|\mathbf{i}_{dq}| = |\mathbf{i}_{\alpha\beta}|$  の制限値を  $i_m$  とする。



○この最大トルク曲線と電流制限の円（振幅を  $r$  とする）の交点を求める。

$$(i_d/i_m)^2 + (i_q/i_m)^2 = r^2 \quad (i_d/i_m - a)^2 - (i_q/i_m)^2 = a^2$$

従って、

$$(i_d/i_m - a)^2 + (i_d/i_m)^2 = a^2 + r^2$$

$$\Rightarrow 2(i_d/i_m)^2 - 2ai_d/i_m - r^2 = 0 \Rightarrow i_d/i_m = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2r^2}}{2}$$

$$(i_q/i_m)^2 = r^2 - (i_d/i_m)^2 = r^2 - \left( \frac{a - \sqrt{a^2 + 2r^2}}{2} \right)^2 = \frac{r^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 + 2r^2}}{2}$$

$$\Rightarrow i_q/i_m = \pm \sqrt{\frac{r^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 + 2r^2}}{2}}$$

以上の結果より、dq 軸電流の制御範囲は  $r=1$  として、次式で与えられる。

$$\frac{a - \sqrt{a^2 + 2}}{2} \leq \frac{i_d}{i_m} \leq 0$$

$$-\sqrt{\frac{1 - a^2 + a\sqrt{a^2 + 2}}{2}} \leq \frac{i_q}{i_m} \leq \sqrt{\frac{1 - a^2 + a\sqrt{a^2 + 2}}{2}}$$

電流制御ではこれらの関係式を満足するよう、電流指令値を制限する必要がある。

例えば、 $a = \frac{\phi_m}{2(L_q - L_d)i_m} = 1$  の場合を考えると、下記の制御範囲となる。

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \leq \frac{i_d}{i_m} \leq 0, \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \leq \frac{i_q}{i_m} \leq \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

○電流振幅とトルクの関係（最大トルク曲線の場合）

トルクと電流振幅の関係を求めるため、次のように変形する。

$$\tau_M = \phi_m i_q - (L_q - L_d) i_d i_q$$

$$\frac{\tau_M}{\phi_m i_m} = \frac{i_q}{i_m} - \frac{1}{2} \frac{2(L_q - L_d)i_m}{\phi_m} \frac{i_d}{i_m} \frac{i_q}{i_m} = \left(1 - \frac{1}{2a} \frac{i_d}{i_m}\right) \frac{i_q}{i_m}$$

最大トルク曲線にそって運転する場合の dq 軸電流の関係式

$$\frac{i_d}{i_m} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2r^2}}{2}, \quad \frac{i_q}{i_m} = \pm \sqrt{\frac{r^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 + 2r^2}}{2}}$$

を代入すると、トルクは次式で表される。

$$\frac{i_d}{i_m} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2r^2}}{2} = \frac{a - \left(a + \sqrt{2r} - \frac{\sqrt{2ar}}{a + \sqrt{2r}}\right)}{2} = \frac{-r^2}{(a + \sqrt{2r})}$$

$$\frac{i_q}{i_m} = \pm \sqrt{r^2 - \frac{r^4}{(a + \sqrt{2r})^2}} = \pm r \sqrt{1 - \frac{r^2}{(a + \sqrt{2r})^2}} = \pm r \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{(a + \sqrt{2r})^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_M}{\phi_m i_m} &= \left(1 - \frac{1}{2a} \frac{i_d}{i_m}\right) \frac{i_q}{i_m} = \left(1 - \frac{1}{2a} \frac{a - \sqrt{a^2 + 2r^2}}{2}\right) \frac{i_q}{i_m} \\
&\approx \pm \left(1 + \frac{1}{2a} \left(\frac{r^2}{(a + \sqrt{2r})}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{(a + \sqrt{2r})^2}\right) r \\
&= \pm \left(1 + \frac{r^2}{2(a + \sqrt{2r})^2} \left(\frac{a + \sqrt{2r}}{a} - 1\right) - \frac{1}{4} \frac{r^4}{a(a + \sqrt{2r})^3}\right) r \\
&= \pm \left(1 + \frac{\sqrt{2}r^3}{2a(a + \sqrt{2r})^2} - \frac{1}{4} \frac{r^4}{a(a + \sqrt{2r})^3}\right) r \\
&= \pm \left(1 + \frac{1}{4} \frac{r^4}{a(a + \sqrt{2r})^3} \left(\frac{4(a + \sqrt{2r})}{\sqrt{2r}} - 1\right)\right) r \\
&= \pm \left(1 + \frac{1}{4} \frac{r^4}{a(a + \sqrt{2r})^3} \left(\frac{4a}{\sqrt{2r}} + 3\right)\right) r \\
&= \pm \left(1 + \frac{r^3}{(a + \sqrt{2r})^3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3r}{4a}\right)\right) r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_M}{\phi_m i_m} &= \pm a \left(\frac{3 + \sqrt{1 + 2(r/a)^2}}{4}\right) \sqrt{\frac{(r/a)^2 - 1 + \sqrt{1 + 2(r/a)^2}}{2}} \\
&\approx \pm a \left(\frac{3 + 1 + (r/a)^2}{4}\right) \sqrt{\frac{(r/a)^2 - 1 + 1 + (r/a)^2}{2}} = \pm \left(1 + \frac{(r/a)^2}{4}\right) r \\
&\text{when } r \ll a
\end{aligned}$$

○インバータの電圧制限と  $i_d$ ,  $i_q$  の関係（抵抗の影響が無視できる場合）

インバータが出力できる六角形の内接円の中に電圧ベクトルの定常値が存在する条件は次式となる。ただし、抵抗の影響は無視できるものとする。

$$v_d^2 + v_q^2 = (\omega L_q i_q)^2 + (\omega L_d i_d + \omega \phi_m)^2 \leq \left(\frac{E_d}{\sqrt{2}}\right)^2$$

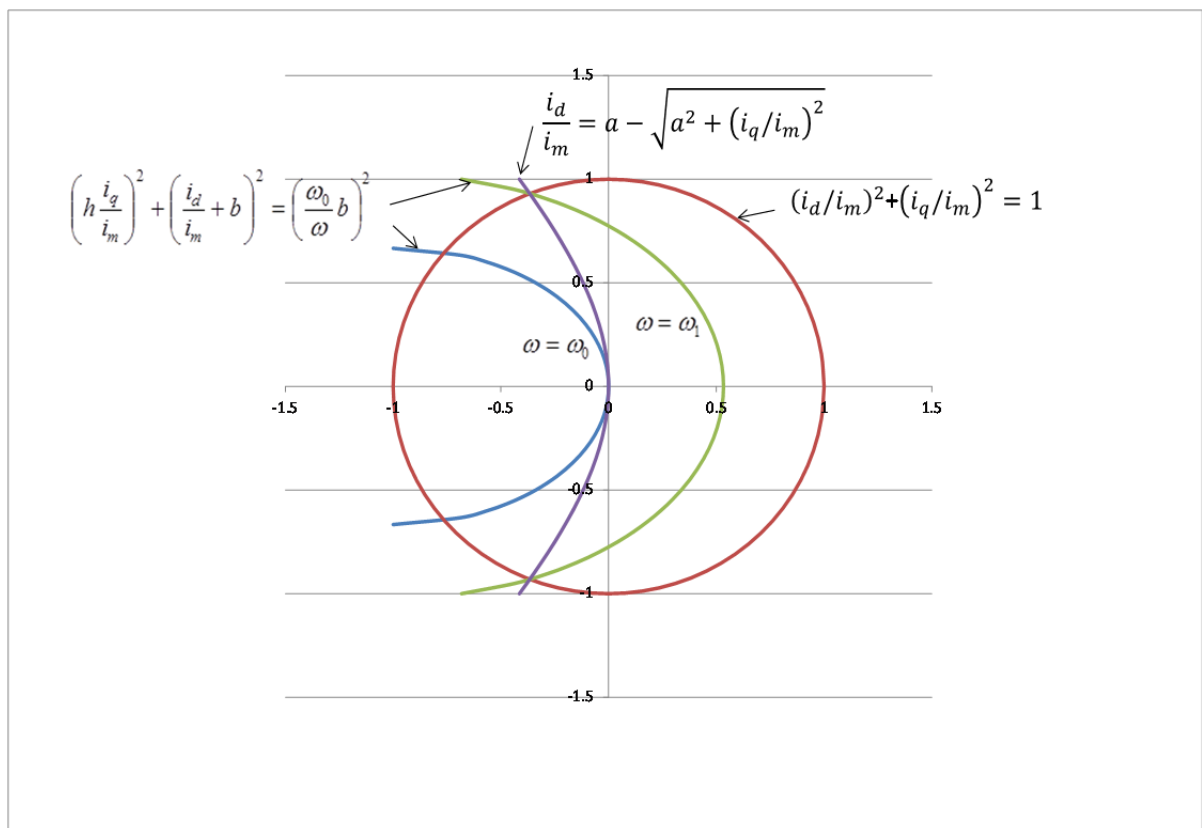
なお、インバータの直流電圧を  $E_d$  とする。この式を  $i_d, i_q$  の関係式として考え、両辺を  $(\omega L_d i_m)^2$  で除して、以下のように整理する。

$$\left(\frac{L_q}{L_d} \frac{i_q}{i_m}\right)^2 + \left(\frac{i_d}{i_m} + \frac{\phi_m}{L_d i_m}\right)^2 \leq \left(\frac{E_d/\sqrt{2}}{\omega \phi_m} \frac{\phi_m}{L_d i_m}\right)^2$$

この結果より、 $h = \frac{L_q}{L_d}$   $\omega_0 = \frac{E_d/\sqrt{2}}{\phi_m}$   $b = \frac{\phi_m}{L_d i_m}$  とおくと、

$$\left(\frac{i_d}{i_m} + b\right)^2 + \left(h \frac{i_q}{i_m}\right)^2 \leq \left(\frac{\omega_0}{\omega} b\right)^2$$

この式は楕円を表し、楕円の中心は  $(i_d/i_m, i_q/i_m) = (-b, 0)$ 、長半径（横軸）は  $b\omega_0/\omega$ 、短半径（縦軸）は  $(b/h)\omega_0/\omega$  となり、径は角速度に反比例する。



なお、パラメータ  $a$  と  $b$  の間には次の関係がある。



$$a = \frac{\phi_m}{2(L_q - L_d)i_m} = \frac{1}{2(L_q/L_d - 1)} \frac{\phi_m}{L_d i_m} = \frac{b}{2(h-1)}$$

具体例とし、突極比が  $h = L_q/L_d = 1.5$  の場合には  $a = b$  となる。

以上、電圧制限の条件下では、 $i_d/i_m$  を次式のように制御する必要がある。

$$\frac{i_d}{i_m} = -b + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega} b\right)^2 - \left(h \frac{i_q}{i_m}\right)^2}$$

さて、この曲線が原点  $(i_d/i_m, i_q/i_m) = (0, 0)$  を通るのは、 $\omega = \omega_0$  の時である。

また、 $\omega = \omega_1$  の時、この曲線が次式で与えられる  $(i_{d0}/i_m, \pm i_{q0}/i_m)$  を通るものとする。

$$\frac{i_{d0}}{i_m} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2}}{2}, \quad \frac{i_{q0}}{i_m} = \pm \sqrt{\frac{1 - a^2 + a\sqrt{a^2 + 2}}{2}}$$

これらの値が決定されると、次式により  $\omega_1$  を求めることができる。

$$\frac{i_{d0}}{i_m} = -b + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega_1} b\right)^2 - \left(h \frac{i_{q0}}{i_m}\right)^2} \Rightarrow \omega_1 = \frac{b}{\sqrt{\left(b + \frac{i_{d0}}{i_m}\right)^2 + \left(h \frac{i_{q0}}{i_m}\right)^2}} \omega_0$$

○トルク最大曲線と電圧制限曲線の交点について

$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_0$  の場合には、トルク最大曲線と電圧制限曲線が交差する。その交点は次のように求めることができる。

$$2 \text{ つの曲線} \quad \left(\frac{i_d}{i_m} + b\right)^2 + \left(h \frac{i_q}{i_m}\right)^2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega} b\right)^2, \quad \left(\frac{i_d}{i_m} - a\right)^2 - \left(\frac{i_q}{i_m}\right)^2 = a^2$$

$$i_q/i_m \text{ を消去すると、} \quad \left(\frac{i_d}{i_m} + b\right)^2 + h^2 \left(\frac{i_d}{i_m} - a\right)^2 = h^2 a^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} b\right)^2$$

整理すると、
$$(1+h^2)\left(\frac{i_d}{i_m}\right)^2 + 2(b-ah^2)\frac{i_d}{i_m} - \left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1\right)b^2 = 0$$

ここで、 $b = 2(h-1)a$ の関係を用いて、 $b$ を消去すると、

$$2(b-ah^2) = 2(2(h-1)a - ah^2) = -2a(h^2 - 2h + 2) - a = -2a((h-1)^2 + 1)$$

従って、

$$(1+h^2)\left(\frac{i_d}{i_m}\right)^2 - 2a((h-1)^2 + 1)\frac{i_d}{i_m} - \left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1\right)(2(h-1)a)^2 = 0$$

これを満足する $i_d$ の値を $i_{d-\omega}$ とすると、

$$\frac{i_{d-\omega}}{i_m} = \frac{a((h-1)^2 + 1) - a\sqrt{((h-1)^2 + 1)^2 + 4(1+h^2)(h-1)^2\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1\right)}}{1+h^2}$$

この時の、 $i_q$ を $i_{q-\omega}$ とすると、最大トルク曲線上にあることより、

$$\left(\frac{i_{d-\omega}}{i_m} - a\right)^2 - \left(\frac{i_{q-\omega}}{i_m}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \frac{i_{q-\omega}}{i_m} = \pm \sqrt{\left(\frac{i_{d-\omega}}{i_m} - a\right)^2 + a^2}$$

のように $i_{q-\omega}$ を求めることができる。

○電圧制限曲線と電流制限の円との交点

$\omega_1 \leq \omega$ の場合には、電圧制限曲線と電流制限の円の交点により最大トルクが制限される。この場合の交点は以下のように求めることができる。

2つの曲線 
$$\left(\frac{i_d}{i_m} + b\right)^2 + \left(h\frac{i_q}{i_m}\right)^2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega}b\right)^2, \quad \left(\frac{i_d}{i_m}\right)^2 + \left(\frac{i_q}{i_m}\right)^2 = 1$$

$i_q/i_m$ を消去すると、
$$-\left(\frac{i_d}{i_m} + b\right)^2 + h^2\left(\frac{i_d}{i_m}\right)^2 = -\left(\frac{\omega_0}{\omega}b\right)^2 + h^2$$

整理すると、
$$\left(h^2 - 1\right)\left(\frac{i_d}{i_m}\right)^2 - 2b\frac{i_d}{i_m} - \left(h^2 + \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)b^2\right) = 0$$

これを満足する  $i_d$  の値を  $i_{d\max_\omega}$  とすると、

$$\frac{i_{d\max_\omega}}{i_m} = \frac{b - \sqrt{b^2 + (h^2 - 1)\left(h^2 + \left(1 - (\omega_0/\omega)^2\right)b^2\right)}}{h^2 - 1}$$

この時の  $i_q$  を  $i_{q\max_\omega}$  とすると、電流制限の円の上にあることより、

$$\left(\frac{i_{d\max_\omega}}{i_m}\right)^2 + \left(\frac{i_{q\max_\omega}}{i_m}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{i_{q\max_\omega}}{i_m} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{i_{d\max_\omega}}{i_m}\right)^2}$$

のように  $i_{q\max_\omega}$  を求めることができる。

### ○制御プログラムの構成

以上の結果をまとめると、次のような計算手順となる。

準備ステップ1：モータ定数およびインバータの条件より  $h, a, b, \omega_0$  を求めておく。

$$h = \frac{L_q}{L_d} \quad \omega_0 = \frac{E_d/\sqrt{2}}{\phi_m} \quad b = \frac{\phi_m}{L_d i_m} \quad a = \frac{\phi_m}{2(L_q - L_d)i_m} = \frac{b}{2(h-1)}$$

準備ステップ2：電流制限曲線と最大トルク曲線の交点を求めておく。

$$\frac{i_{d0}}{i_m} = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2}}{2}, \quad \frac{i_{q0}}{i_m} = \pm \sqrt{\frac{1 - a^2 + a\sqrt{a^2 + 2}}{2}}$$

準備ステップ3：電圧制限が問題となる角速度  $\omega_1$  を求めておく。

$$\omega_1 = \frac{b}{\sqrt{(b + i_{d0}/i_m)^2 + (hi_{q0}/i_m)^2}} \omega_0$$

制御では、角速度によりとトルク指令により制御パターンを切り替える。

ケース 1 :  $\omega \leq \omega_1$  の場合

最大トルク曲線にそって制御。

$$i_d/i_m = a - \sqrt{a^2 + (i_q/i_m)^2}$$

ただし、q 軸電流指令を大きさを制限する。

$$-\sqrt{\frac{1-a^2 + a\sqrt{a^2+2}}{2}} \leq \frac{i_q}{i_m} \leq \sqrt{\frac{1-a^2 + a\sqrt{a^2+2}}{2}}$$

ケース 2 :  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_0$  の場合、

角速度  $\omega$  により次式により、 $i_{q-\omega}$  をもとめる。

$$\frac{i_{d-\omega}}{i_m} = \frac{a((h-1)^2 + 1) - a\sqrt{((h-1)^2 + 1)^2 + 4(1+h^2)(h-1)^2((\omega_0/\omega)^2 - 1)}}{1+h^2}$$

$$\frac{i_{q-\omega}}{i_m} = \pm \sqrt{\left(\frac{i_{d-\omega}}{i_m} - a\right)^2 + a^2}$$

$-i_{q-\omega} < i_q^* < i_{q-\omega}$  の時は最大トルク曲線にそって、 $i_{q_{\max-\omega}} > i_q^* > i_{q-\omega}$  または

$-i_{q_{\max-\omega}} < i_q^* < -i_{q-\omega}$  の時は電圧制限曲線にそって運転。

ケース 3 :  $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$  の場合は電圧制限曲線にそって運転。

## 機械系の取り扱い

### ○機械系の運動方程式

$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau_M - \tau_L$$

$J$  : 系全体の慣性モーメント

$\tau_L$  : 負荷トルク (機械系の損失も含む)

### ○慣性モーメントの考え方

機械系では慣性モーメントの値が重要。

電動機により駆動される機械系全体について、運動エネルギー  $E$  と慣性モーメント  $J$  (モータ軸換算、電気系換算) の間には次の関係がある。

$$E = \frac{1}{2} J \omega^2$$

一例として、電気自動車を考え、

減速機の減速比を  $k$ 、車両重量 (含む乗員) を  $M$  [kg]、

減速機から見て

モータ側にある慣性モーメントの合計を  $J_1$  [kg・m<sup>2</sup>] (モータ軸換算)、

車輪側にある慣性モーメントの合計を  $J_2$  [kg・m<sup>2</sup>] (車軸換算)、

タイヤの半径を  $r$  [m]、

車のスピードを  $v$  [m/s] とすると、

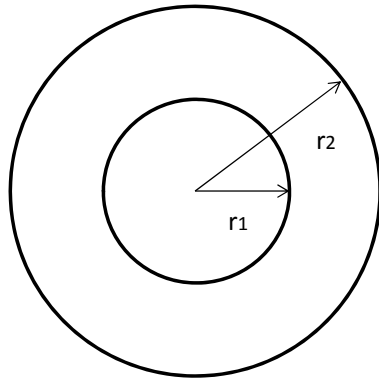
運動エネルギーの合計は

$$E = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega^2 + \frac{1}{2} J_2 (\omega/k)^2 = \frac{1}{2} \left( J_1 + \left( \frac{1}{k} \right)^2 (J_2 + M r^2) \right) \omega^2$$

従って、 $J = J_1 + \left( \frac{1}{k} \right)^2 (J_2 + M r^2)$

### ○円柱の中心軸周りの慣性モーメント

内径  $r_1$ 、外径  $r_2$ 、重さ  $M$  の中空の円柱（均質な材料で出来ている）の中心軸周りの慣性モーメント  $J$  を考える。



中心からの距離の二乗平均が次のように計算できる。

$$\left(r^2\right)_{mean} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} r^2 (2\pi r dr)}{\int_{r_1}^{r_2} 2\pi r dr} = \frac{(\pi/2)(r_2^4 - r_1^4)}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{2}$$

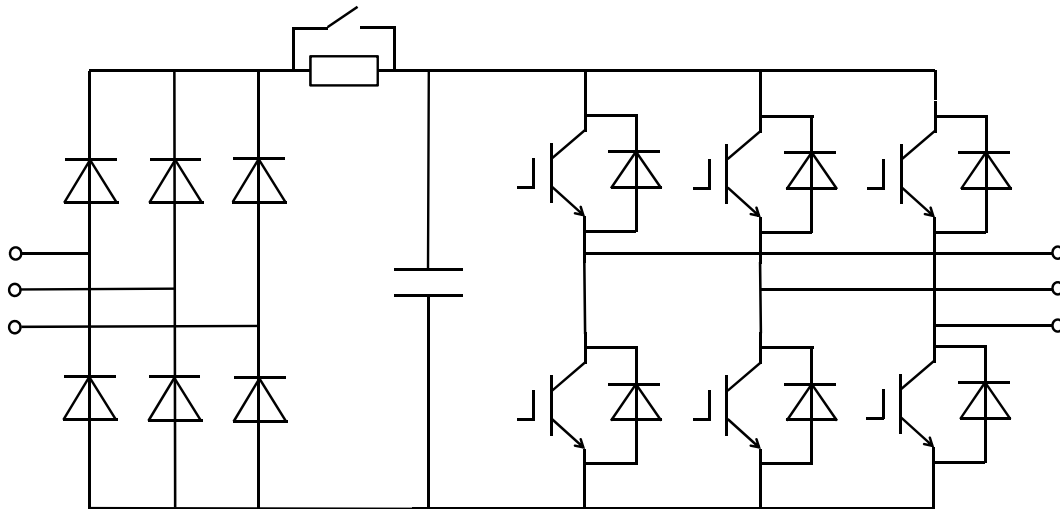
従って

$$J = M \left(r^2\right)_{mean} = M \frac{r_2^2 + r_1^2}{2}$$

○回転部分の外形や質量から慣性モーメントを推測できる。

○速度制御のためにも出来るだけ正確な機械系全体の慣性モーメントが必要。

#### 4. 三相電圧形インバータのPWM制御



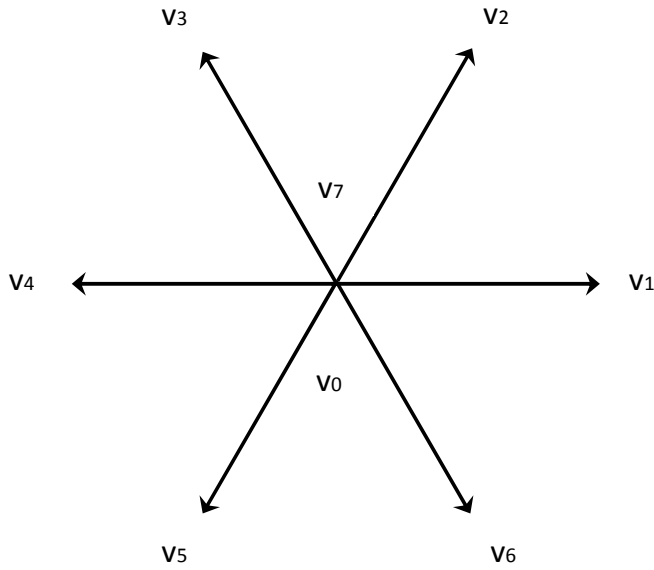
インバータの構成

三相電圧形インバータの等価回路

インバータが出力可能な電圧

ベクトル	オンの素子			直流中点からの電圧			コモンモード電圧	三相出力電圧			$v_{\alpha\beta}$	
	u相	v相	w相	eu	ev	ew	$e_n=(e_u+e_v+e_w)/3$	vu	vv	vw	絶対値	角度
V0	下	下	下	-Ed/2	-Ed/2	-Ed/2	-Ed/2	0	0	0	0	-
V1	上	下	下	Ed/2	-Ed/2	-Ed/2	-Ed/6	2Ed/3	-Ed/3	-Ed/3	$\sqrt{\frac{2}{3}}E_d$	0
V2	上	上	下	Ed/2	Ed/2	-Ed/2	Ed/6	Ed/3	Ed/3	-2Ed/3		$\pi/3$
V3	下	上	下	-Ed/2	Ed/2	-Ed/2	-Ed/6	-Ed/3	2Ed/3	-Ed/3		$2\pi/3$
V4	下	上	上	-Ed/2	Ed/2	Ed/2	Ed/6	-2Ed/3	Ed/3	Ed/3		$\pi$
V5	下	下	上	-Ed/2	-Ed/2	Ed/2	-Ed/6	-Ed/3	-Ed/3	2Ed/3		$4\pi/3$
V6	上	下	上	Ed/2	-Ed/2	-Ed/2	Ed/6	Ed/3	-2Ed/3	Ed/3	$5\pi/3$	
V7	上	上	上	Ed/2	Ed/2	Ed/2	Ed/2	0	0	0	0	-

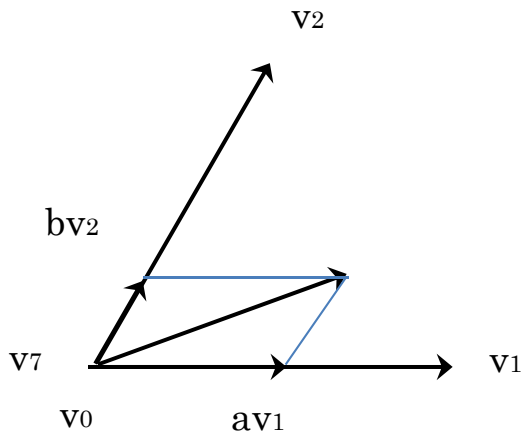
○三相電圧形インバータが瞬時値として出力可能な電圧ベクトルは六角形の頂点と中心のみ。



$$v_0 = 0, v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j0}, v_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j\pi/3}, v_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j2\pi/3}$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j\pi}, v_5 = \sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j4\pi/3}, v_6 = \sqrt{\frac{2}{3}}E_d e^{j5\pi/3}, v_7 = 0$$

○六角形の内部の任意の電圧ベクトルはそれを囲む3点（中心と2つの頂点）に相当する電圧ベクトルを組み合わせ、平均値として実現。



○ $V_{\alpha\beta}$  が  $V_1, V_2, V_0$  ( $V_7$ ) で囲まれる領域(上図)にある場合について考える。この時、 $v_u \geq v_v \geq v_w$  の関係がある。電圧の空間ベクトルは次式のように変換



できる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{\alpha\beta} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( v_u e^{j0} + v_u e^{\frac{j2\pi}{3}} + v_w e^{\frac{j4\pi}{3}} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( v_u e^{j0} - v_v \left( e^{j0} + e^{\frac{j4\pi}{3}} \right) + v_w e^{\frac{j4\pi}{3}} \right) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( (v_u - v_v) e^{j0} - (v_v - v_w) e^{\frac{j4\pi}{3}} \right) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( (v_u - v_v) e^{j0} + (v_v - v_w) e^{\frac{j\pi}{3}} \right)
 \end{aligned}$$

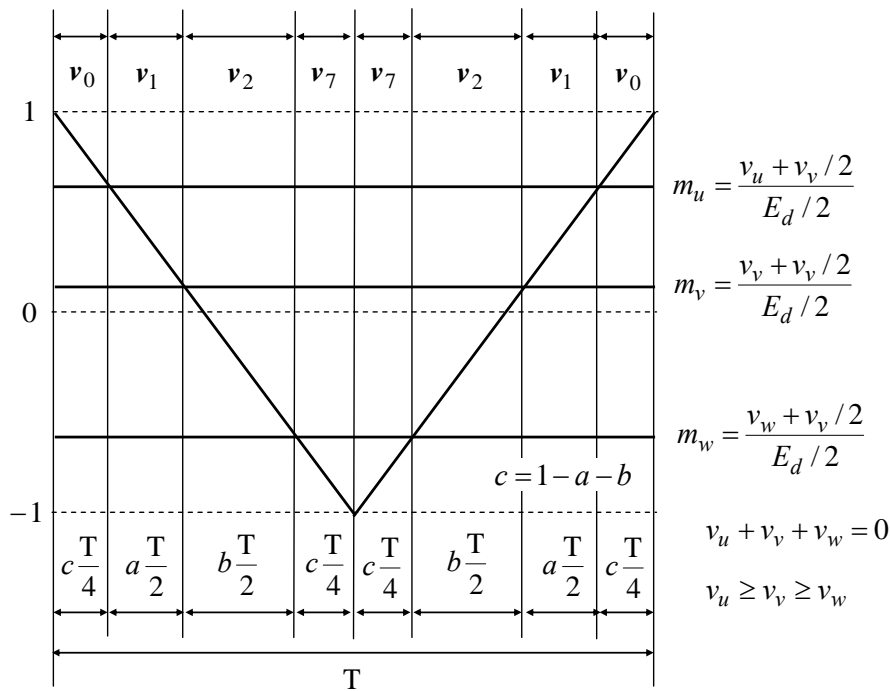
一方、図より次式が成り立つ。

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} = (a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = \sqrt{\frac{2}{3}} E_d \left( a e^{j0} + b e^{\frac{j\pi}{3}} \right)$$

従って、 $a, b$  と三相電圧の間には次の関係がある。

$$a = \frac{v_u - v_v}{E_d} \quad b = \frac{v_v - v_w}{E_d}$$

三相 PWM を三角波比較方式で行う場合の選択ベクトルを下図に示す。



キャリア周期  $T$  における  $V_1$  および  $V_2$  の選択比率をそれぞれ  $a, b$  とすると三角波と比較する変調率信号  $m_u, m_v, m_w$  の間に次の関係が成り立つ。

$$a \frac{T}{2} : b \frac{T}{2} : \frac{T}{2} = (m_u - m_v) : (m_v - m_w) : 2$$

また、電圧制御の範囲を広くとるためには、飽和までの余裕度、正側  $1 - m_u$ 、負側  $m_w + 1$  が同じとなると都合がよい。即ち、 $m_u = -m_w$

これらの関係を組み合わせると、

$$a = \frac{v_u - v_v}{E_d} = \frac{m_u - m_v}{2} \quad b = \frac{v_v - v_w}{E_d} = \frac{m_v - m_w}{2}$$

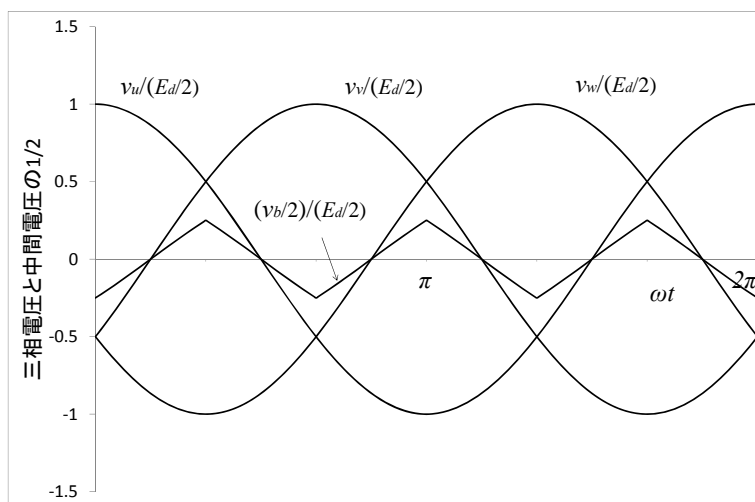
$v_u + v_v + v_w = 0$ 、 $m_u = -m_w$  の関係などを用いて、変調度について解くと次式が得られる。

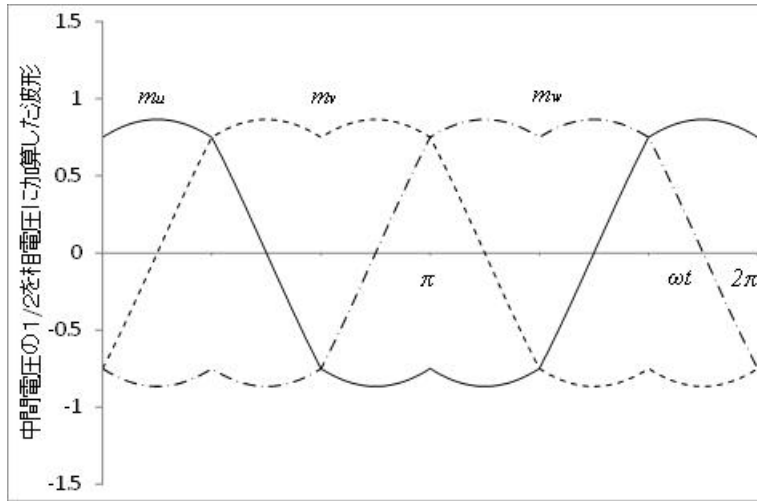
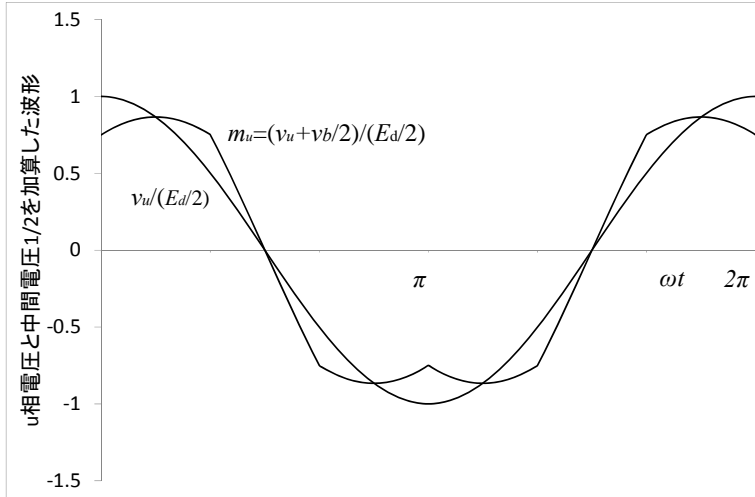
$$m_u = a + b = \frac{1}{2} \frac{v_u - v_w}{E_d/2} = \frac{1}{2} \frac{v_u + (v_u + v_v)}{E_d/2} = \frac{v_u + v_v/2}{E_d/2}$$

$$m_v = b - a = \frac{1}{2} \frac{2v_v - v_u - v_w}{E_d/2} = \frac{1}{2} \frac{2v_v + v_v}{E_d/2} = \frac{v_v + v_v/2}{E_d/2}$$

$$m_w = -m_u = \frac{1}{2} \frac{v_w - v_u}{E_d/2} = \frac{1}{2} \frac{v_w + (v_v + v_w)}{E_d/2} = \frac{v_w + v_v/2}{E_d/2}$$

この結果を見ると、中間の電圧 ( $v_v$ ) の  $1/2$  をコモンモード電圧として加算し、各相の変調度を計算すればよいことが分かる。中間電圧  $1/2$  加算の波形を以下に示す。





## 電流制御の考え方

○dq 座標での基本式（連続系として考えた場合）

$$v_d = ri_d + p(L_d i_d) - \omega L_q i_q$$

$$v_q = ri_q + \omega L_d i_d + p(L_q i_q) + \omega \phi_m$$

○モータパラメータ、速度、電流の正確な情報が得られれば、電流に関するフィードバックは比例制御とする。

結果として、制御の基本式は（P 制御+非干渉制御）

ただし、パラメータ誤差、インバータ電圧制御誤差を考慮し、定常偏差低減のために積分制御を付加する場合もある。

○比例制御のフィードバックゲインについて

$$v_d^* = k_{pd} (i_d^* - i_d) + ri_d - \omega L_q i_q$$

$$v_q^* = k_{pq} (i_q^* - i_q) + ri_q + \omega L_d i_d + \omega \phi_m$$

電圧制御誤差が無視できる場合（ $v_d^* = v_d$ ,  $v_q^* = v_q$ ）

基本式と組み合わせて、

$$p(L_d i_d) = k_{pd} (i_d^* - i_d)$$

$$p(L_q i_q) = k_{pq} (i_q^* - i_q)$$

$$\frac{i_d(s)}{i_d^*(s)} = \frac{k_{pd} / L_d}{s + k_{pd} / L_d}, \quad \frac{i_q(s)}{i_q^*(s)} = \frac{k_{pq} / L_q}{s + k_{pq} / L_q}$$

○連続系として考えると  $k_{pd}$  や  $k_{pq}$  を大きく選べば応答速度が上げられる。

○PWM インバータを用いる場合の注意点

- 1) PWM のキャリア周期毎の平均電圧を調整している。
- 2) 電流検出から電圧指令値が有効となるまでには、1 キャリア周期の遅れが生じる。

○サンプル値制御系として検討

サンプル値系は  $z$  変換で解析

定義 
$$I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} i_{nT} z^{-n}, \quad i_{nT} = i(nT)$$

$z$  変換の例

$$i(t) = 1, \quad I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$i(t) = e^{-at}, \quad I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

$$i(t) = te^{-at}, \quad I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nTe^{-anT} z^{-n} = \frac{Te^{-aT} z^{-1}}{(1 - e^{-aT} z^{-1})^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(-a)} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} nTe^{-anT} z^{-n} \\ &= \frac{d}{d(-a)} \left( \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \right) = \frac{Te^{-aT} z^{-1}}{(1 - e^{-aT} z^{-1})^2} \end{aligned}$$

$z$  変換による電流制御系の解析 (インダクタンスのみを負荷とした場合)

基本式のサンプル値系としての表現

電流制御の制御遅れ（1 サンプルリング周期）

$$\frac{L}{T}(i_{(n+1)T} - i_{nT}) = v_{nT}$$

$$v_{nT} = k(i_{(n-1)T}^* - i_{(n-1)T})$$

組み合わせると

$$\frac{L}{T}(i_{(n+1)T} - i_{nT}) = k(i_{(n-1)T}^* - i_{(n-1)T})$$

$z$  変換した関係式では、1 サンプルリング周期の遅れが  $z^{-1}$  を乗ずることに相当するため、

$$\frac{L}{T}(I(z) - z^{-1}I(z)) = k(z^{-2}I^*(z) - z^{-2}I(z))$$

$$\frac{I(z)}{I^*(z)} = \frac{(kT/L)z^{-2}}{1 - z^{-1} + (kT/L)z^{-2}}$$

具体的な計算例（ステップ応答）  $I^*(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$

1)  $kT/L = 1/4$  の場合

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{0.25z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-2}}{(2 - z^{-1})^2} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{-4}{(2 - z^{-1})^2} + \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{-1}{(1 - 0.5z^{-1})^2} + \frac{1}{1 - z^{-1}} = -\left(1 + z^{-1} + \dots + (n+1)(0.5)^n z^{-n} + \dots\right) \\ &\quad + \left(1 + z^{-1} + \dots + z^{-n} + \dots\right) \\ &= 0 + 0z^{-1} + 0.25z^{-2} + 0.5z^{-3} + \dots \left(1 - (n+1)(0.5)^n\right) z^{-n} + \dots \end{aligned}$$

2)  $kT/L = 1/3$  の場合

$$I(z) = \frac{(1/3)z^{-2}}{1-z^{-1} + (1/3)z^{-2}} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-2}}{3-3z^{-1} + z^{-2}} \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{z^{-2}}{(a-z^{-1})(\bar{a}-z^{-1})} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{A}{(a-z^{-1})} + \frac{\bar{A}}{(\bar{a}-z^{-1})} + \frac{B}{1-z^{-1}}$$

ただし

$$a = \sqrt{3}e^{j\pi/6} = 1.5 + j0.5\sqrt{3}, \quad \bar{a} = \sqrt{3}e^{-j\pi/6} = 1.5 - j0.5\sqrt{3}$$

$$A = \frac{a^2}{(\bar{a}-a)1-a} = -j\sqrt{3}, \quad \bar{A} = j\sqrt{3}, \quad B = \frac{1}{(a-1)(\bar{a}-1)} = 1$$

従って

$$I(z) = \frac{A/a}{(1-z^{-1}/a)} + \frac{\bar{A}/\bar{a}}{(1-z^{-1}/\bar{a})} + \frac{B}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{-0.5 - j0.5\sqrt{3}}{(1-z^{-1}/a)} + \frac{-0.5 + j0.5\sqrt{3}}{(1-z^{-1}/\bar{a})} + \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= (-0.5 - j0.5\sqrt{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1}/a)^n$$

$$+ (-0.5 + j0.5\sqrt{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1}/\bar{a})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^n} + \frac{1}{\bar{a}^n} \right) - \frac{j\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{a^n} - \frac{1}{\bar{a}^n} \right) \right) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{3^{n/2}} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3^{n/2}} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right) z^{-n}$$

具体的に計算すると

$$\begin{aligned}
i_0 &= 0 \\
i_T &= 1 - \frac{1}{3^{1/2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \frac{1}{3^{1/2}} \frac{1}{2} = 0 \\
i_{2T} &= 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{3} \\
i_{3T} &= 1 - \frac{1}{3^{3/2}} 0 - \frac{\sqrt{3}}{3^{3/2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\
i_{4T} &= 1 - \frac{1}{3^2} \left( -\frac{1}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{1}{18} - \frac{3}{18} = \frac{8}{9} \\
i_{5T} &= 1 - \frac{1}{3^{5/2}} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3^{5/2}} \left( \frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{1}{18} - \frac{1}{18} = 1 \\
i_{6T} &= 1 - \frac{1}{3^3} (-1) - \frac{\sqrt{3}}{3^3} (0) = \frac{28}{27}
\end{aligned}$$

3)  $kT/L = 1/2$ の時

$$I(z) = \frac{z^{-2}}{(a - z^{-1})(\bar{a} - z^{-1})} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{A}{(a - z^{-1})} + \frac{\bar{A}}{(\bar{a} - z^{-1})} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{2}e^{j\pi/4} = 1 + j \\
\bar{a} &= \sqrt{2}e^{-j\pi/4} = 1 - j
\end{aligned}$$

$$A = \frac{a^2}{(\bar{a} - a)} \frac{1}{1 - a} = \frac{(\sqrt{2}e^{j\pi/4})^2}{(-j2)(-j)} = \frac{j2}{(j2)(j)} = -j, \quad \bar{A} = j$$

$$B = \frac{1}{(a - 1)(\bar{a} - 1)} = \frac{1}{(j)(-j)} = 1$$

$$\frac{A}{a} = \frac{-j}{\sqrt{2}e^{j\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j3\pi/4} = -1 - j, \quad \frac{\bar{A}}{\bar{a}} = -1 + j$$



$$\begin{aligned}
I(z) &= \frac{A/a}{(1-z^{-1}/a)} + \frac{\bar{A}/\bar{a}}{(1-z^{-1}/\bar{a})} + \frac{B}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{-1-j}{(1-z^{-1}/a)} + \frac{-1+j}{(1-z^{-1}/\bar{a})} + \frac{1}{1-z^{-1}} \\
&= (-1-j) \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1}/a)^n + (-1+j) \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1}/\bar{a})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{1}{a^n} + \frac{1}{\bar{a}^n} \right) - j \left( \frac{1}{a^n} - \frac{1}{\bar{a}^n} \right) \right) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{2^{n/2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \frac{1}{2^{n/2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) z^{-n} \\
I(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{2^{n/2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \frac{1}{2^{n/2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) z^{-n}
\end{aligned}$$

$$i_0 = 0$$

$$i_T = 1 - \frac{1}{2^{1/2}} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2^{1/2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$i_{2T} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

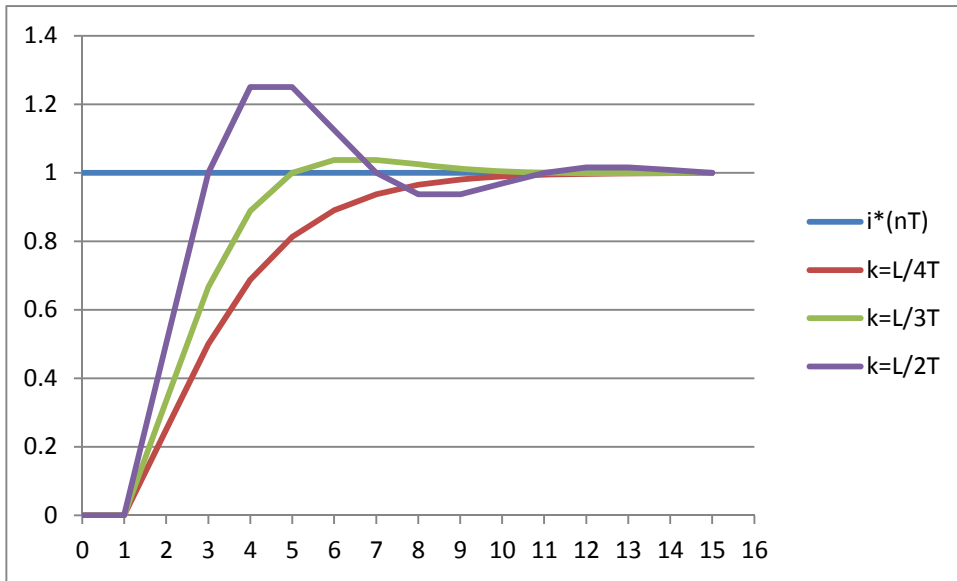
$$i_{3T} = 1 - \frac{1}{2^{3/2}} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$i_{4T} = 1 - \frac{1}{2^2} (-1) - \frac{1}{2^2} (0) = \frac{5}{4}$$

$$i_{5T} = 1 - \frac{1}{2^{5/2}} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1}{2^{5/2}} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{5}{4}$$

$$i_{6T} = 1 - \frac{1}{2^3} (0) - \frac{1}{2^3} (-1) = \frac{9}{8}$$

以上の結果をもとに、ステップ応答をグラフに示すと



○制御遅れに対する対策をしない場合、

比例ゲインは  $(L/T)$  の  $1/3$  程度が適切。

○制御遅れに対する対策

現在の電圧を用いて、次式に従って電流を予測する。

$$i_{nT} = i_{(n-1)T} + \frac{T}{L} v_{(n-1)T}$$

電圧の制御式を変更

$$v_{nT} = k \left( i_{(n-1)T}^* - i_{(n-1)T} - \frac{T}{L} v_{(n-1)T} \right)$$

この時、次式のように考えることができる。

$$\frac{L}{T}(i_{(n+1)T} - i_{nT}) = k(i_{(n-1)T}^* - i_{nT})$$

$$\frac{L}{T}(I(z) - z^{-1}I(z)) = k(z^{-2}I^*(z) - z^{-1}I(z))$$

$$\frac{I(z)}{I^*(z)} = \frac{(kT/L)z^{-2}}{1 - (1 - kT/L)z^{-1}}$$

1)  $kT/L = 1$  の場合

$$\frac{I(z)}{I^*(z)} = z^{-2} \Rightarrow I(z) = z^{-2}I^*(z)$$

2)  $kT/L = 1 - a$  の場合

$$\frac{I(z)}{I^*(z)} = \frac{(1-a)z^{-2}}{1 - az^{-1}}$$

$$I^*(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$I(z) = \frac{(1-a)z^{-2}}{1 - az^{-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}} = z^{-2} \left( \frac{-a}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - z^{-1}} \right)$$

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{(1-a)z^{-2}}{1 - az^{-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}} = z^{-2} \left( \frac{-a}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) \\ &= z^{-2} \left( -a \left( 1 + (az^{-1}) + (az^{-1})^2 + \dots \right) + 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \right) \\ &= z^{-2} \left( (1-a) + (1-a^2)z^{-1} + (1-a^3)z^{-2} + \dots \right) \end{aligned}$$

○計算に使用するインダクタンスが実際の値とずれている場合。

$$\frac{L}{T}(i_{(n+1)T} - i_{nT}) = v_{nT}$$

$$v_{nT} = k \left( i_{(n-1)T}^* - i_{(n-1)T} - \frac{T}{\hat{L}} v_{(n-1)T} \right)$$

ただし、 $L$  は実際値、 $\hat{L}$  は計算に用いた値

この時、次のように考えることができる。

$$v_{nT} + \frac{kT}{\hat{L}} v_{(n-1)T} = k(i_{(n-1)T}^* - i_{(n-1)T})$$

$z$  変換して考えると、

$$\frac{L}{T} (I(z) - z^{-1}I(z)) = z^{-1}V(z)$$

$$\left(1 + \frac{kT}{\hat{L}} z^{-1}\right) V(z) = kz^{-1}(I^*(z) - I(z))$$

代入して整理すると、

$$\left[\left(1 + \frac{kT}{\hat{L}} z^{-1}\right)(1 - z^{-1}) + k \frac{T}{L} z^{-2}\right] I(z) = k \frac{T}{L} z^{-2} I^*(z)$$

$$\frac{I(z)}{I^*(z)} = \frac{(kT/L)z^{-2}}{1 - (1 - kT/\hat{L})z^{-1} + kT(1/L - 1/\hat{L})z^{-2}}$$

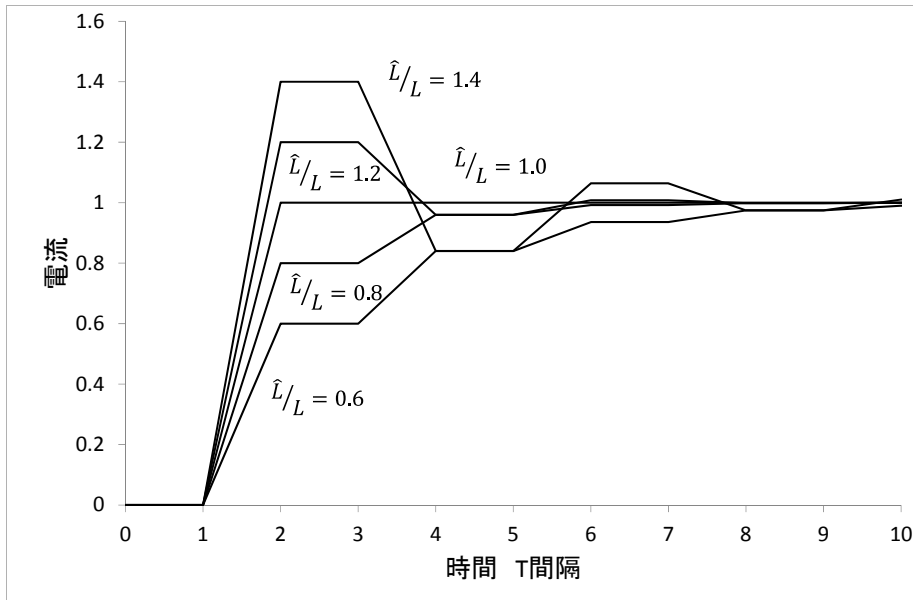
$$\frac{kT}{\hat{L}} = 1$$

$$\frac{I(z)}{I^*(z)} = \frac{\hat{L}/Lz^{-2}}{1 - (1 - \hat{L}/L)z^{-2}} = \frac{(1 - a^2)z^{-2}}{1 - a^2z^{-2}}$$

$$a = \sqrt{1 - \hat{L}/L}$$

$$\begin{aligned}
I^*(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} \\
I(z) &= \frac{\left(\frac{1-z^{-1}}{1-a^2}\right)z^{-2}}{1-a^2z^{-2}} \frac{1}{1-z^{-1}} = \left( -\frac{1+z^{-1}}{1-a^2z^{-2}} + \frac{1}{1-z^{-1}} \right) \\
&= \left( 1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\dots \right) - \left( 1+(az^{-1})^2+(az^{-1})^4+\dots \right) \\
&\quad - z^{-1} \left( 1+(az^{-1})^2+(az^{-1})^4+\dots \right) \\
&= 0+0z^{-1}+(1-a^2)z^{-2}+(1-a^2)z^{-3}+(1-a^4)z^{-4}+(1-a^4)z^{-5}+\dots
\end{aligned}$$

以上の結果より、インダクタンスの誤差をパラメータにステップ応答を図示すると、



○インダクタンスの値を正確に合わせる必要があるが、制御遅れを考慮した電流制御を行うと、2サンプル周期で指令値に一致させることができる。

## 永久磁石同期電動機における電流制御（制御遅れを考慮）のまとめ

1) 現在 ( $t = (n-1)T$ ) の検出電流値と電圧指令値および非干渉制御成分より、次のタイミング ( $t = nT$ ) での電流を予測。指令電圧がリミットされた場合はリミットされた値を使用。

$$i_{d\_nT} = i_{d\_ (n-1)T} + \frac{T}{L} (v_{d\_ (n-1)T}^* - e_{d\_ (n-1)T})$$

$$i_{q\_nT} = i_{q\_ (n-1)T} + \frac{T}{L} (v_{q\_ (n-1)T}^* - e_{q\_ (n-1)T})$$

2) 次のタイミング ( $t = nT$ ) での抵抗の電圧降下および逆起電力を予測

$$e_{d\_nT} = r(i_{d\_nT} + i_{d\_ (n-1)T}^*)/2 - \omega L_q (i_{q\_nT} + i_{q\_ (n-1)T}^*)/2$$

$$e_{q\_nT} = r(i_{q\_nT} + i_{q\_ (n-1)T}^*)/2 + \omega L_d (i_{d\_nT} + i_{d\_ (n-1)T}^*)/2 + \omega \phi_m$$

3) 次のタイミング ( $t = nT$ ) での電圧指令値を計算

$$v_{d\_nT}^* = \frac{L}{T} (i_{d\_ (n-1)T}^* - i_{d\_nT}) + e_{d\_nT}$$

$$v_{q\_nT}^* = \frac{L}{T} (i_{q\_ (n-1)T}^* - i_{q\_nT}) + e_{q\_nT}$$

4)  $v_{dq}^* = v_{d\_nT}^* + jv_{q\_nT}^*$  を三相電圧に変換、ただし、現在の回転角度に比べ、

$1.5\omega T$  だけ位相を進めておく必要あり。

その他の注意点

- 実際には PWM のデッドタイムによる電圧制御誤差の補償が必要
- 磁気飽和によるインダクタンスの変化がある場合には制御ゲインの変更が必要。
- モータパラメータを出来るだけ正確に把握。誤差が大きい場合には電流制御に積分も付加することも必要。

## 速度制御の考え方

○機械系の運動方程式

$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau_M - \tau_L \Rightarrow \tau_M = J \frac{d\omega}{dt} + \tau_L$$

○慣性モーメントや負荷トルクが不明な場合には PI 補償

$$\tau_M^* = k_P (\omega^* - \omega) + k_I \int_0^t (\omega^* - \omega) dt$$

ただし、1) 速度指令値はステップ的に変更しない。  
その変化率を制限する。

2) 誤差積分をリミット、リセットするなどの対策

○慣性モーメントが把握できる場合には、次式のような制御も可能。

$$\tau_M^* = J \frac{d}{dt} \omega^* + \hat{\tau}_L + k_P (\omega^* - \omega)$$

ただし、 $\hat{\tau}_L$  は負荷トルク推定値

○負荷トルクの推定 (外乱オブザーバ)

$$J \frac{d}{dt} \hat{\omega} = \tau_M^* - \hat{\tau}_L$$

$$\hat{\tau}_L = k_1 (\hat{\omega} - \omega) + k_2 \int_0^t (\hat{\omega} - \omega) dt$$

実システムの関係  $J \frac{d}{dt} \omega = \tau_M^* - \tau_L$  と組み合わせると、

$$J \frac{d}{dt} (\hat{\omega} - \omega) + k_1 (\hat{\omega} - \omega) + k_2 \int_0^t (\hat{\omega} - \omega) dt = \tau_L$$

ラプラス変換して考えると

$$\hat{\omega}(s) - \omega(s) = \frac{1}{Js + k_1 + k_2/s} \tau_L(s)$$

$$\hat{\tau}_L(s) = \left( k_1 + \frac{k_2}{s} \right) (\hat{\omega}(s) - \omega(s)) = \frac{k_1 s + k_2}{Js^2 + k_1 s + k_2} \tau_L(s)$$

この伝達関数より、負荷トルク推定値はステップ及びランプ入力に対して、定常偏差は零となる。負荷変化が遅い場合には  $k_2=0$  とすることも可能。トルクの制御精度、速度の検出精度が十分であれば、 $k_1$ 、 $k_2$  を大きく選ぶことも可能。

ゲインの設計法の詳細については、次節の検討結果を利用できる。



## 6. 位置および速度の計算法

### ロータリーエンコーダ (ABZ、インクremental)

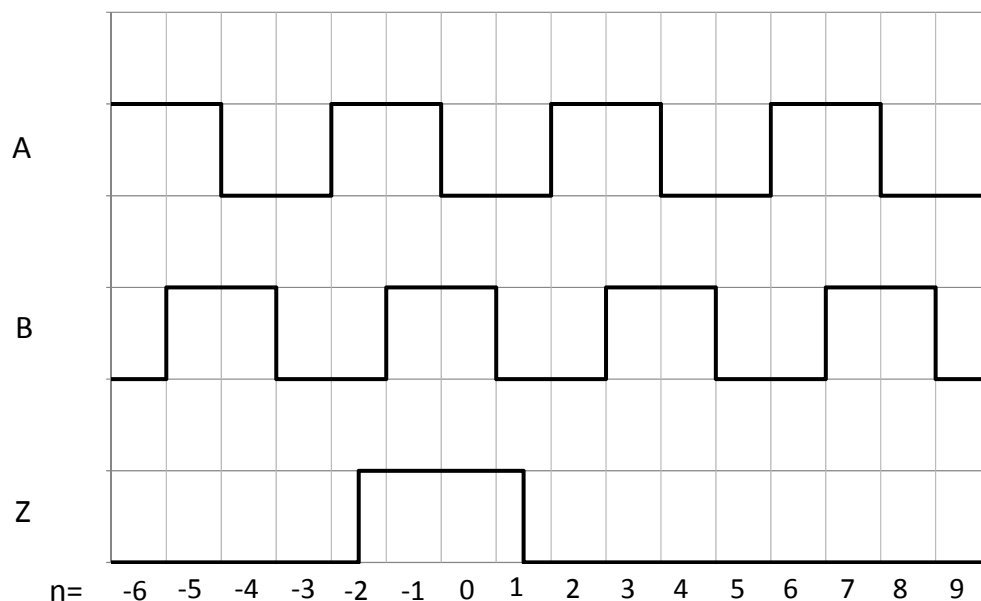
○ロータリーエンコーダとは：

回転するディスクにスリットを設け、光信号を検出して、回転状況を把握。

インクremental：基準の位置の信号 (Z) と単位回転角毎に発生する信号 (A、B) を出力、A、B 信号に位相差を設けることにより、回転方向を判断。

アブソリュート：回転角度に応じて必要なビット数の角度情報を出力。

○ABZ 信号と回転位置の関係



○A 信号、B 信号のいずれかが変化したら位置信号  $n$  を変更する。

一回転当たりのパルス数を  $p$  とすると、 $-2p \leq n \leq 2p-1$

$n = -2p$  ( $\theta = -\pi$ ) と  $n = 2p$  ( $\theta = \pi$ ) は同じ位置

AB 信号の 1 周期を 4 分割していることから、一回転を  $4p$  に分割

○  $n$  を直接決められる場合

$Z=1$  で AB = 01 の場合は  $n = 0$

$Z=1$  で AB = 11 の場合は  $n = -1$

○  $n$  を増減する条件 ( $Z = 0$ )

前の状態	今の状態	$n$ の増減
AB=00	AB=10	n=n+1
AB=10	AB=11	
AB=11	AB=01	
AB=01	AB=00	
AB=00	AB=01	n=n-1
AB=01	AB=11	
AB=11	AB=10	
AB=10	AB=00	

○  $n = 2p$  の時は  $n = -2p$  に、 $n = -2p-1$  の時  $n = 2p-1$  に変更。

○ 角度  $\theta = \pi \times \frac{n}{2p}$

## 回転角度 $\theta$ から角速度 $\omega$ を求める方法

### ○基本式

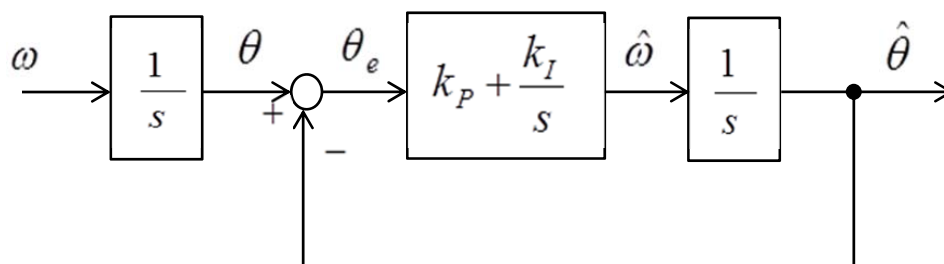
角度  $\theta = \int_0^t \omega dt$

角度推定値  $\hat{\theta} = \int_0^t \hat{\omega} dt$

推定誤差  $\theta_e = \theta - \hat{\theta}$

角速度演算式  $\hat{\omega} = k_p(\theta - \hat{\theta}) + k_I \int_0^t (\theta - \hat{\theta}) dt$

### ○ブロック線図



### ○伝達関数

$$\frac{\hat{\theta}}{\theta} = \frac{\hat{\omega}}{\omega} = \frac{\frac{sk_p + k_I}{s^2}}{1 + \frac{sk_p + k_I}{s^2}} = \frac{sk_p + k_I}{s^2 + sk_p + k_I} = \frac{ab\alpha(s + \alpha)}{(s + a\alpha)(s + b\alpha)}$$

ただし

$$\frac{k_I}{k_p} = \alpha \quad (a + b)\alpha = ab\alpha = k_p \quad ab\alpha^2 = k_I$$

○ $a, b$  の設計

$$ab = a + b \Rightarrow b(a - 1) = a \Rightarrow b = \frac{a}{a - 1}$$

$$1 < a \leq 2 \leq b$$

具体的数値例

$a$	$b$	$b/a$	$ab=a+b$
2	2	1	4
1.5	3	2	4.5
1.2	6	5	7.2
1.1	11	10	12.1
1.05	21	20	22.05

○加速時の推定誤差 ( $a=b=2$ )

$$\omega(t) = \beta t$$

$$\omega(s) - \hat{\omega}(s) = \left( 1 - \frac{4\alpha s + 4\alpha^2}{s^2 + 4\alpha s + 4\alpha^2} \right) \frac{\beta}{s^2} = \frac{\beta}{(s + 2\alpha)^2}$$

$$\omega(t) - \hat{\omega}(t) = \beta t e^{-2\alpha t}$$

誤差の最大値を求めると

$$\frac{d}{dt} [\omega(t) - \hat{\omega}(t)] = \beta (e^{-2\alpha t} - 2\alpha t e^{-2\alpha t}) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2\alpha}$$

$$[\omega(t) - \hat{\omega}(t)]_{\max} = \frac{\beta}{2\alpha} e^{-1} = \frac{\beta}{4\alpha} (2e^{-1}) = \frac{\beta}{k_P} 0.735$$

○加速時の推定誤差 ( $1 < a < b$ )

$$\omega(t) = \beta t$$

$$\begin{aligned} \omega(s) - \hat{\omega}(s) &= \left( 1 - \frac{(a+b)\alpha s + ab\alpha^2}{s^2 + (a+b)\alpha s + ab\alpha^2} \right) \frac{\beta}{s^2} \\ &= \frac{\beta}{(s+a\alpha)(s+b\alpha)} = \frac{\beta}{(b-a)\alpha} \left( \frac{1}{s+a\alpha} - \frac{1}{s+b\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\omega(t) - \hat{\omega}(t) = \frac{\beta}{(b-a)\alpha} (e^{-a\alpha t} - e^{-b\alpha t})$$

誤差の最大値を求めると

$$\frac{d}{dt} [\omega(t) - \hat{\omega}(t)] = \frac{\beta}{(b-a)\alpha} (-a\alpha e^{-a\alpha t} + b\alpha e^{-b\alpha t}) = 0$$

$$ae^{-a\alpha t} = be^{-b\alpha t} \Rightarrow e^{(b-a)\alpha t} = \frac{b}{a} \Rightarrow e^{-a\alpha t} = \left( \frac{b}{a} \right)^{1-\frac{b}{b-a}}$$

$$e^{-a\alpha t} - e^{-b\alpha t} = e^{-a\alpha t} - \frac{a}{b} e^{-a\alpha t} = e^{-a\alpha t} \frac{b-a}{b}$$

$$\begin{aligned} [\omega(t) - \hat{\omega}(t)]_{\max} &= \frac{\beta}{(b-a)\alpha} \frac{(b-a)}{b} \left( \frac{b}{a} \right)^{1-\frac{b}{b-a}} \\ &= \frac{\beta}{ab\alpha} a^{\frac{b}{b-a}} b^{1-\frac{b}{b-a}} = \frac{\beta}{k_P} \left( \frac{a^b}{b^a} \right)^{\frac{1}{b-a}} \approx \frac{\beta}{k_P} \left( \frac{1.2^6}{6^{1.2}} \right)^{\frac{1}{4.8}} = \frac{\beta}{k_P} 0.8 \end{aligned}$$

○加速時( $\omega = \beta t$ )の推定誤差は最大で  $\frac{0.8\beta}{k_P}$  [rad/s] 程度

○加速時の角度推定の定常誤差（参考）

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{2}\beta t^2 \\ \theta(s) - \hat{\theta}(s) &= \left(1 - \frac{(a+b)\alpha s + ab\alpha^2}{s^2 + (a+b)\alpha s + ab\alpha^2}\right) \frac{\beta}{s^3} \\ &= \frac{s^2}{s^2 + (a+b)\alpha s + ab\alpha^2} \frac{\beta}{s^3} = \frac{\beta}{(s+a\alpha)(s+b\alpha)s} \\ &= \frac{\beta}{\alpha^2} \left[ \frac{1}{ab} \frac{1}{s} - \frac{1}{a(b-a)} \frac{1}{(s+a\alpha)} + \frac{1}{b(b-a)} \frac{1}{(s+b\alpha)} \right]\end{aligned}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} [(\theta - \hat{\theta})s] = \frac{\beta}{ab\alpha^2} = \frac{\beta}{k_I}$$

$$\theta_e(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t) = \frac{\beta}{\alpha^2} \left[ \frac{1}{ab} - \frac{1}{a(b-a)} e^{-a\alpha t} + \frac{1}{b(b-a)} e^{-b\alpha t} \right]$$

$$\theta_e(0) = 0, \quad \theta_e(\infty) = \frac{\beta}{ab\alpha^2} = \frac{\beta}{k_I}$$

○加速時 ( $\theta = \frac{1}{2}\beta t^2$ ) の角度推定値の定常誤差は  $\frac{\beta}{k_I}$  [rad]

○具体的な数値例

$$\beta = 314(50\text{Hz})$$

$$a = 1.1, \quad b = 11, \quad \alpha = 20$$

$$k_P = (a+b)\alpha = 12.1\alpha = 242 \quad k_I = ab\alpha^2 = 12.1 \times 400 = 4840$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} [(\theta - \hat{\theta})s] = 0.065 \text{ rad} \quad [\omega(t) - \hat{\omega}(t)]_{\max} = 1.04 \text{ rad/s}$$

注意) 制御周期  $T$  (周波数  $F_s$ ) のプログラムに組み込む場合

$$k_P T \ll 1 \quad \Rightarrow \quad k_P = ab\alpha \leq 0.2 * F_s$$

○エンコーダの分解能によるリップル成分

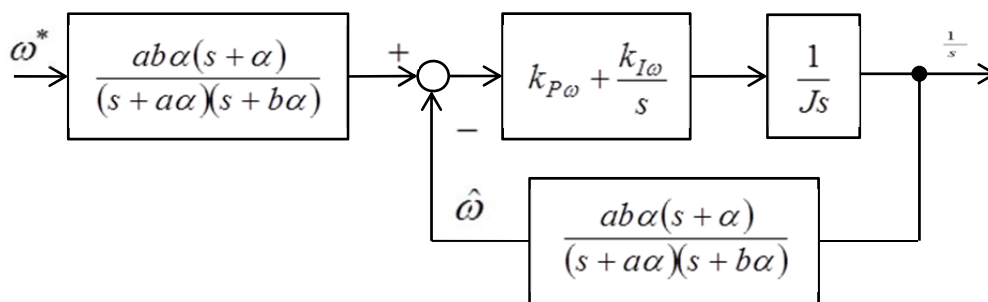
1 回転 1000 パルスのエンコーダの場合、

$\theta$  の分解能  $\Delta\theta = 2\pi/4000 = 0.00157 \text{ rad/s} = 0.09 \text{ deg}$ 、従って、

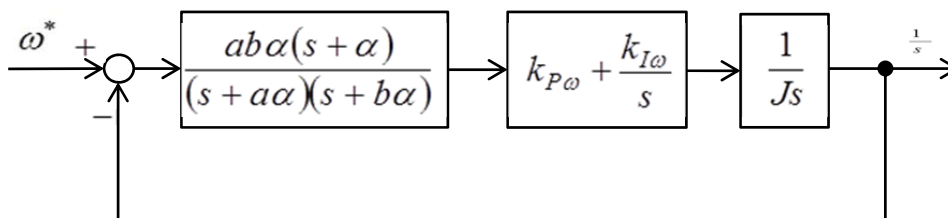
$k_P\Delta\theta = 0.35 \text{ rad/s}$  のリップルが角速度推定値に重畳する。

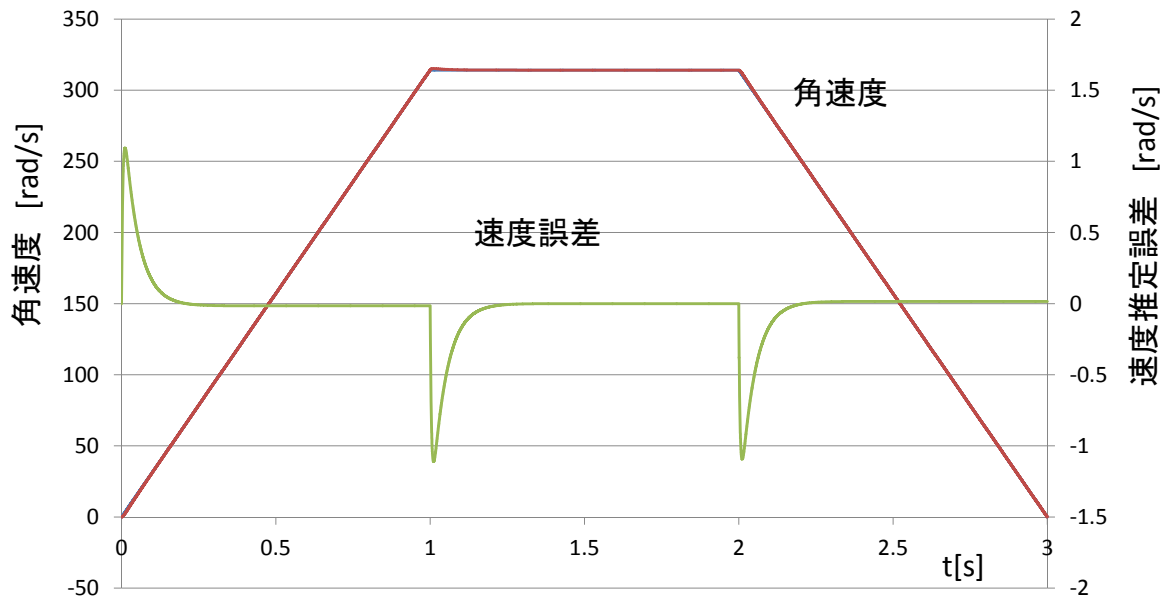
○速度推定の伝達関数を考慮した速度制御系の構成

ブロック線図 A : 速度推定の伝達関数を指令値側にも挿入

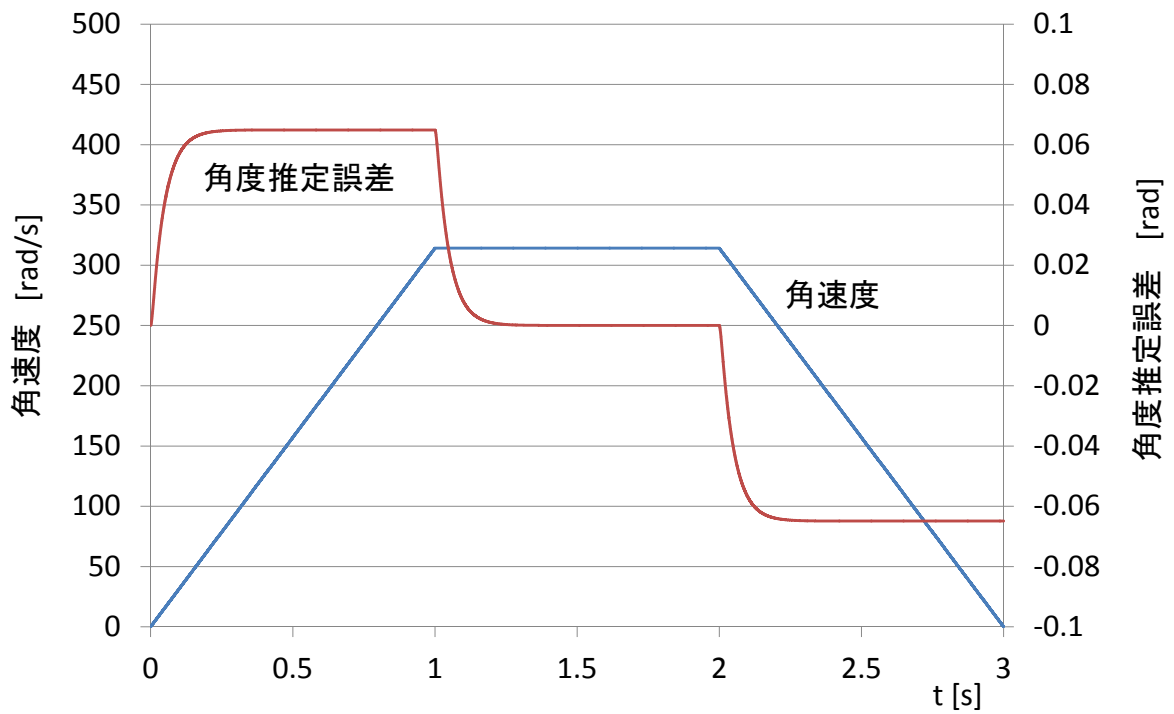


ブロック線図 B (A と等価) : 速度制御劣化を防止





加減速時の速度推定誤差



加減速時の角度推定誤差