

電気学会技術者教育委員会パワーエレクトロニクス教育 WG

第4回パワエレ・セミナー

「テーマ1：空間ベクトルとその応用」

2014年12月20日(土)13:00~17:00

於：青山学院大学相模原キャンパス L棟 L-402 教室

これまでのパワエレ・セミナー「電動機制御の基礎」の中で説明した多くの項目の中から特に重要と思われるものを個別テーマとして取り上げたシリーズを開始します。今回は、「テーマ1：空間ベクトルとその応用」として空間ベクトルの考え方について分かり易く、時間をかけて説明します。最初のハードル（本当は非常に低い）さえ超えれば、大変便利な考え方であること、色々な計算が簡単に行えることが分かります。

主な内容

1. 空間ベクトルとは

空間ベクトルと三相電圧・電流の関係、変換式の考え方。
複素数としての取扱いとベクトルとしての取扱い。

2. 三相電圧・電流波形と高調波

三相電圧・電流波形と高調波の関係、空間ベクトルと高調波の関係。
具体的な交流波形（180度矩形波など）を対象に具体的に検討。

3. 同期回転座標と $\alpha\beta/dq$ 変換

$\alpha\beta/dq$ 変換の考え方。回転座標変換が極めて簡単に行えること。
静止座標（ $\alpha\beta$ 座標）と回転座標（ dq 座標）での電圧・電流方程式。

4. 複素フィルタ

空間ベクトルに対するフィルタの考え方、特にバンドパスフィルタについて具体的に検討。

5. 空間ベクトルを用いた誘導機の等価回路

空間ベクトルと $\alpha\beta/dq$ 変換を用いると、誘導電動機の等価回路（過渡時にも利用可能）が簡単に導出できること。

6. アンケート：基礎知識（受講前）の状況、セミナーの内容やレベルについて、重要な概念の理解度のチェック、資料や説明方法について、今後開催を希望するテーマなど

1. 空間ベクトルとは

○空間ベクトルの定義（三相／ $\alpha\beta$ 変換）

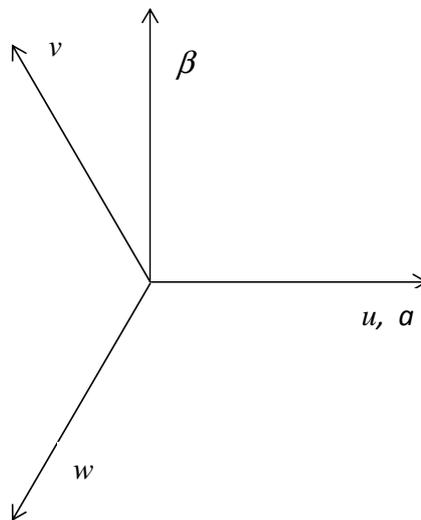
三相電圧・電流の瞬時値より、次の定義式に従って空間ベクトルを求める。

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} = v_\alpha + jv_\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(v_u + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot v_v + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cdot v_w \right)$$

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta} = i_\alpha + ji_\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(i_u + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot i_v + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cdot i_w \right)$$

これは、複素平面上で $\alpha\beta$ 軸と三相の軸を下図のように選ぶことに相当。

uvw, $\alpha\beta$ の座標軸の関係



三相／ $\alpha\beta$ 変換は行列を用いて表記することも可能であるが、複素数を使うことにより、記述が簡単となる。

○基本波のみの場合の空間ベクトル

一例として三相正弦波の場合を考える。

$$v_u = \sqrt{2}V \cos(\omega t), \quad v_v = \sqrt{2}V \cos(\omega t - 2\pi/3), \\ v_w = \sqrt{2}V \cos(\omega t - 4\pi/3)$$

次の関係式を利用して、定義式に代入すると、

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{\alpha\beta} &= \sqrt{\frac{2}{3}}(v_u + e^{j2\pi/3} \cdot v_v + e^{j4\pi/3} \cdot v_w) \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2V} \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + e^{j2\pi/3} \frac{e^{j(\omega t - 2\pi/3)} + e^{-j(\omega t - 2\pi/3)}}{2} + e^{j4\pi/3} \frac{e^{j(\omega t - 4\pi/3)} + e^{-j(\omega t - 4\pi/3)}}{2} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2V} \left(\frac{3}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}(1 + e^{j4\pi/3} + e^{j8\pi/3}) \right) = \sqrt{3}Ve^{j\omega t}
\end{aligned}$$

この結果より、三相電圧が対称で基本波のみの場合、その空間ベクトルは、複素平面上で原点を中心とした円の上を回転することが分かる。また、円の半径（振幅）は相電圧実効値の $\sqrt{3}$ 倍で、回転角速度は角周波数 ω である。

次に相電流が次式で与えられるものとして、電流の空間ベクトルを求める。

$$\begin{aligned}
i_u &= \sqrt{2}I \cos(\omega t - \varphi), \quad i_v = \sqrt{2}I \cos(\omega t - 2\pi/3 - \varphi) \\
i_w &= \sqrt{2}I \cos(\omega t - 4\pi/3 - \varphi)
\end{aligned}$$

電圧に対して位相遅れがある点のみが異なり、結果は次式となる。

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{3}Ie^{j(\omega t - \varphi)}$$

○空間ベクトル（複素数）の内積

複素数を単位ベクトルを1およびjとしたベクトルと考え、内積（演算子を●で表す）を計算する。

基本

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= a + jb = xe^{j\alpha}, \quad \mathbf{y} = c + jd = ye^{j\beta} \\
\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} &= ac + bd = xy \cos(\alpha - \beta)
\end{aligned}$$

大切な関係式

$$\begin{aligned}
1 \bullet 1 &= e^{j\frac{2\pi}{3}} \bullet e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\frac{4\pi}{3}} \bullet e^{j\frac{4\pi}{3}} = 1 \\
1 \bullet e^{j\frac{2\pi}{3}} &= e^{j\frac{2\pi}{3}} \bullet e^{j\frac{4\pi}{3}} = 1 \bullet e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} \\
(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \bullet \mathbf{z} &= \mathbf{x} \bullet \mathbf{z} + \mathbf{y} \bullet \mathbf{z}
\end{aligned}$$

これらの関係を用いると

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_{\alpha\beta} \bullet \mathbf{1} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(i_u + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot i_v + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cdot i_w \right) \bullet \mathbf{1} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(i_u - \frac{1}{2}(i_v + i_w) \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} i_u \\
\Rightarrow i_u &= \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{i}_{\alpha\beta} \bullet \mathbf{1}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}(\mathbf{i}_{\alpha\beta})
\end{aligned}$$

この関係式は、空間ベクトルから相電流（相電圧）を逆算したい場合に利用する。v, w相については、それぞれの軸方向の成分を取ればよく、次式の関係が得られる。

$$i_v = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\mathbf{i}_{\alpha\beta} \bullet e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re} \left(\mathbf{i}_{\alpha\beta} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right)$$

$$i_w = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\mathbf{i}_{\alpha\beta} \bullet e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re} \left(\mathbf{i}_{\alpha\beta} e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right)$$

○三相の瞬時電力は電圧ベクトルと電流ベクトルの内積から求められる。

空間ベクトルの定義式から次式に従って内積を取ると、三相全体の瞬時電力に一致することが分かる。

$$p(t) = \mathbf{v}_{\alpha\beta} \bullet \mathbf{i}_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{2}{3} \left(v_u + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot v_v + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cdot v_w \right) \bullet \left(i_u + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot i_v + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cdot i_w \right)$$

$$= \frac{2}{3} \left[v_u \left(i_u - \frac{1}{2} i_v - \frac{1}{2} i_w \right) + v_v \left(i_v - \frac{1}{2} i_w - \frac{1}{2} i_u \right) + v_w \left(i_w - \frac{1}{2} i_u - \frac{1}{2} i_v \right) \right]$$

$$= v_u i_u + v_v i_v + v_w i_w$$

ただし、 $i_u + i_v + i_w = 0$ を仮定しており、三相3線式には適用できるが、三相4線式ではコモンモード成分（零相分）を別途計算する必要がある。

また、空間ベクトルとし次式が成り立つため、直交成分から計算するか、極座標成分から計算するかは自由に選択できる。

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} = v_\alpha + jv_\beta = \left| \mathbf{v}_{\alpha\beta} \right| e^{j(\omega t - \theta_v)}, \quad \mathbf{i}_{\alpha\beta} = i_\alpha + ji_\beta = \left| \mathbf{i}_{\alpha\beta} \right| e^{j(\omega t - \theta_i)}$$

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} \bullet \mathbf{i}_{\alpha\beta} = v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta = \left| \mathbf{v}_{\alpha\beta} \right| \left| \mathbf{i}_{\alpha\beta} \right| \cos(\theta_i - \theta_v)$$

先に求めた基本波のみの場合について考えると、

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \sqrt{3}V e^{j\omega t}, \quad \mathbf{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{3}I e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} \bullet \mathbf{i}_{\alpha\beta} = 3VI \cos(\omega t - (\omega t - \varphi)) = 3VI \cos \varphi$$

となり、相電圧実効値 V 、相電流実効値 I 、力率 $\cos \varphi$ から求まる三相電力であることが確認できる。

○コモンモード電圧の取扱い

$v_u + v_v + v_w \neq 0$, $i_u + i_v + i_w \neq 0$ の場合にはコモンモード電圧によりコモンモード電流が流れることになる。ただし、正相分や逆相分に対する電動機の等価回路とコモンモード（零相分）に対する電動機の等価回路が異なることに注意が必要。すなわち、正相分や逆相分電流が回転磁界を発生するのに対し、零相分電流が作る有効磁束は互いに打ち消しあい、各相の漏れ磁束のみが残る。この結果、零相分に対しては漏れインダクタンスのみが有効で、励磁インダクタンスを零とした等価回路となる。

一般に、中性点を介して電流が流れるため、三相全体の電流を考えるのが分かり易い。

$$v_0 = \frac{v_u + v_v + v_w}{3}, \quad i_0 = i_u + i_v + i_w$$

コモンモード電圧による問題を解決するには、コモンモードチョークコイルやコモンモード変圧器を挿入して、コモンモード電流を抑制する必要がある。

2. 三相電圧・電流波形と高調波

三相の電動機では通常、巻線および磁気回路の構造が相により異なることはなく、三相の対称性が確保されている。従って、定常状態では、電圧（電流）波形について次の関係が成り立つ。

$$v_u = f(\omega t), \quad v_v = f(\omega t - 2\pi/3), \quad v_w = f(\omega t - 4\pi/3)$$

○電圧形インバータの出力電圧波形（6パルス）の高調波

一例として、三相電圧形インバータを6パルス運転した場合の電圧波形を考える。インバータの直流電圧 E_d の中点を基準とすると、各相の電圧は180度毎に極性が変わる矩形波となる。振幅を $E_d/2$ としてフーリエ級数展開すると、

$$f(\omega t) = \frac{4 E_d}{\pi 2} \left[\cos(\omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) - \frac{1}{7} \cos(7\omega t) + \dots \right]$$

周波数成分のうち、3の倍数の次数の高調波は零相成分となり、

$$v_0 = \frac{v_u + v_v + v_w}{3} = \frac{4 E_d}{\pi 2} \left[-\frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{9} \cos(9\omega t) - \frac{1}{15} \cos(15\omega t) + \dots \right]$$

従って、零相分を差し引いた電圧は、

$$\begin{aligned} v_u - v_0 &= \frac{4 E_d}{\pi 2} \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) - \frac{1}{7} \cos(7\omega t) + \dots \right] \\ v_v - v_0 &= \frac{4 E_d}{\pi 2} \left[\cos(\omega t - 2\pi/3) + \frac{1}{5} \cos(5(\omega t - 2\pi/3)) - \frac{1}{7} \cos(7(\omega t - 2\pi/3)) + \dots \right] \\ v_w - v_0 &= \frac{4 E_d}{\pi 2} \left[\cos(\omega t - 4\pi/3) + \frac{1}{5} \cos(5(\omega t - 4\pi/3)) - \frac{1}{7} \cos(7(\omega t - 4\pi/3)) + \dots \right] \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \cos(5(\omega t - 2\pi/3)) &= \cos(5\omega t - 4\pi/3) \\ \cos(5(\omega t - 4\pi/3)) &= \cos(5\omega t - 2\pi/3) \\ \cos(7(\omega t - 2\pi/3)) &= \cos(7\omega t - 2\pi/3) \\ \cos(7(\omega t - 4\pi/3)) &= \cos(7\omega t - 4\pi/3) \end{aligned}$$

の関係があるため

$$\begin{aligned} v_v - v_0 &= \frac{4 E_d}{\pi 2} \left[\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{1}{7} \cos\left(7\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \dots \right] \\ v_w - v_0 &= \frac{4 E_d}{\pi 2} \left[\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{7} \cos\left(7\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \dots \right] \end{aligned}$$

となり空間ベクトルに変換すると次式が得られる。

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{4 E_d}{\pi 2} \left[e^{j\omega t} + \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} - \frac{1}{7} e^{j7\omega t} - \dots \right] = \frac{\sqrt{6}}{\pi} E_d \left[e^{j\omega t} + \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} - \frac{1}{7} e^{j7\omega t} - \dots \right]$$

なお、零相分を含む電圧波形から空間ベクトルを計算しても、同じ結果が得られる。

○電流形インバータ（120度通電）の出力電流波形と高調波

120度通電波形は位相の異なる180度通電波形の平均として求められる。

$$\begin{aligned}
i_u &= \frac{1}{2}(f(\omega t + \pi/6) + f(\omega t - \pi/6)) \\
&= \frac{2}{\pi} I_d \left[\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(3\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\right) - \frac{1}{3} \cos\left(3\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{5} \cos\left(5\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)\right) - \frac{1}{7} \cos\left(7\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\right) - \frac{1}{7} \cos\left(7\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)\right) + \dots \right] \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_d \left[\cos(\omega t) - \frac{1}{5} \cos(5\omega t) + \frac{1}{7} \cos(7\omega t) + \dots \right]
\end{aligned}$$

空間ベクトルに変換すると

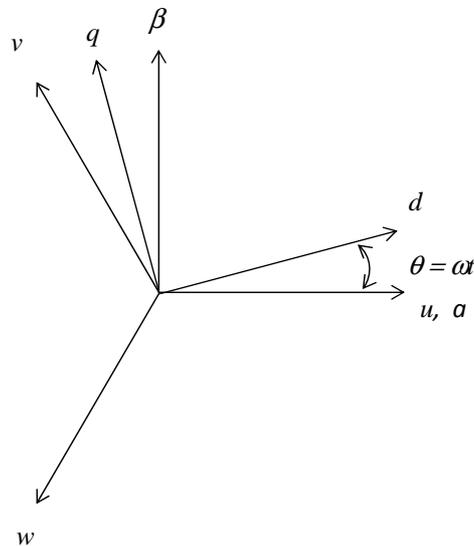
$$\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2\sqrt{3}I_d}{\pi} \left[e^{j\omega t} - \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} + \frac{1}{7} e^{j7\omega t} - \dots \right] = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} I_d \left[e^{j\omega t} - \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} + \frac{1}{7} e^{j7\omega t} - \dots \right]$$

○この結果より得られる重要な結論

静止座標（ $\alpha\beta$ 軸）からみると、基本波ベクトルの回転方向に対し、第5次高調波ベクトル（一般には第 $(6k-1)$ 次）の回転方向は逆であり、第7次高調波ベクトル（一般には第 $(6k+1)$ 次）の回転方向は同じである。

3. 同期回転座標(dq座標)と $\alpha\beta/dq$ 変換

回転磁界に同期して回転するdq座標（同期回転座標）から見ると、基本波電圧・電流の空間ベクトルが静止（直流）して見えるため解析が簡単となる。



dq軸、 $\alpha\beta$ 軸、三相の関係

○基本式（ $\alpha\beta/dq$ 変換）

$$\mathbf{i}_{dq} = e^{-j\alpha} \mathbf{i}_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{v}_{dq} = e^{-j\alpha} \mathbf{v}_{\alpha\beta} \Rightarrow \mathbf{i}_{\alpha\beta} = e^{j\alpha} \mathbf{i}_{dq}, \quad \mathbf{v}_{\alpha\beta} = e^{j\alpha} \mathbf{v}_{dq}$$

ただし、 α 軸に対するd軸の角度を $\theta = \omega t$ とする。一例として

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{3}Ie^{j\omega t}$$

$$\mathbf{i}_{dq} = e^{-j\omega t}\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \sqrt{3}I$$

高調波を含む場合を考えると

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}I_d \left[e^{j\omega t} - \frac{1}{5}e^{-j5\omega t} + \frac{1}{7}e^{j7\omega t} - \dots \right],$$

$$\mathbf{i}_{dq} = e^{-j\omega t}\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}I_d \left[1 - \frac{1}{5}e^{-j6\omega t} + \frac{1}{7}e^{j6\omega t} - \dots \right]$$

○この結果より得られる重要な結論

基本波に対して同期する同期回転座標 (dq 軸) から見ると、基本波ベクトルは静止して見え、第5次高調波 (一般には第 (6k-1) 次) は座標の回転とは逆方向に 6ω で回転するベクトル、第7次高調波 (一般には第 (6k+1) 次) は座標の回転と同じ方向に 6ω で回転するベクトルに見える。従って、第5次と第7次の高調波は dq 軸では同じ周波数 6ω の成分になるが周波数の符号 (回転方向) が異なることになる。一つの軸のみで見ると回転方向を判定することはできないが、2つの成分を持つ空間ベクトルで考えることにより、回転方向を判別できる。

○α β 軸と dq 軸での電圧・電流方程式の違い

一例として次の方程式を考える。

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} = r\mathbf{i}_{\alpha\beta} + p(L\mathbf{i}_{\alpha\beta}) + \mathbf{e}_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow (e^{j\omega t}\mathbf{v}_{dq}) = r(e^{j\omega t}\mathbf{i}_{dq}) + p(Le^{j\omega t}\mathbf{i}_{dq}) + (e^{j\omega t}\mathbf{e}_{dq})$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_{dq} = e^{-j\omega t}r(e^{j\omega t}\mathbf{i}_{dq}) + e^{-j\omega t}p(Le^{j\omega t}\mathbf{i}_{dq}) + e^{-j\omega t}(e^{j\omega t}\mathbf{e}_{dq})$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_{dq} = r\mathbf{i}_{dq} + (p + j\omega)(L\mathbf{i}_{dq}) + \mathbf{e}_{dq}$$

$$\text{ただし、 } p = \frac{d}{dt}$$

○この結果より、α β 座標と d q 座標では、微分演算子のみを置き換えればよ

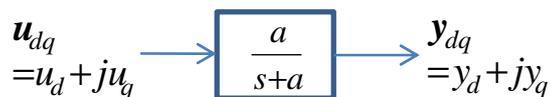
いことが分かる。

$$\alpha \beta \text{ 座標から } dq \text{ 座標への変換 } \quad p \Rightarrow p + j\omega$$

$$dq \text{ 座標から } \alpha \beta \text{ 座標への変換 } \quad p \Rightarrow p - j\omega$$

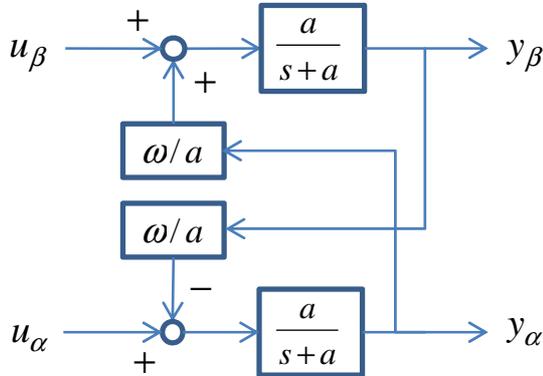
4. 複素バンドパスフィルタ

○ dq 座標でローパスフィルタを挿入することと、α β 座標で基本波に対する複素バンドパスフィルタを挿入することは等価である。



$$\mathbf{u}_{\alpha\beta} = u_\alpha + ju_\beta \rightarrow \boxed{\frac{a}{s-j\omega+a}} \rightarrow \mathbf{y}_{\alpha\beta} = y_\alpha + jy_\beta$$

○空間ベクトルの実部と虚部を別々に考え、複素バンドパスフィルタを2入力2出力で表現すると



○複素バンドパスフィルタの応答

次の入力に対する過渡応答を考える。

$$\mathbf{u}_{\alpha\beta}(t) = e^{j\omega t}, \quad \mathbf{U}_{\alpha\beta}(s) = \frac{1}{s-j\omega}$$

出力は

$$\mathbf{Y}_{\alpha\beta}(s) = \mathbf{G}_{\alpha\beta}(s) \times \mathbf{U}_{\alpha\beta}(s) = \frac{a}{s-j\omega+a} \times \frac{1}{s-j\omega} = \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s-j\omega+a}$$

$$\mathbf{y}_{\alpha\beta}(t) = e^{j\omega t} - e^{-at} e^{j\omega t} = e^{j\omega t} (1 - e^{-at})$$

同じ応答を dq 座標 (回転角速度 ω) で考えると、

$$\mathbf{u}_{dq}(t) = e^{-j\omega t} \mathbf{u}_{\alpha\beta}(t) = 1, \quad \mathbf{U}_{dq}(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathbf{Y}_{dq}(s) = \mathbf{G}_{dq}(s) \times \mathbf{U}_{dq}(s) = \frac{a}{s+a} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$\mathbf{y}_{dq}(t) = e^{-j\omega t} \mathbf{y}_{\alpha\beta}(t) = 1 - e^{-at}$$

○複素バンドパスフィルタのメリット

$\alpha\beta/dq$ 変換を行ってローパスフィルターを通し、 $dq/\alpha\beta$ 変換により戻す操作が、座標変換を行わずに実現できる。座標変換には \sin や \cos の演算が必要なため演算時間が問題となる場合があるが、複素バンドパスフィルタとすれば演算時間が短縮できる。

○複素バンドパスフィルタの周波数特性

複素バンドパスフィルタの伝達関数を次式とする。

$$G(s) = \frac{a}{s - j\omega + a}$$

次の入力を考える。

$$u(t) = e^{jk\omega t}, \quad -\infty < k < \infty$$

$$U(s) = \frac{1}{s - jk\omega}$$

出力を計算すると

$$Y(s) = \frac{a}{s - j\omega + a} \times \frac{1}{s - jk\omega} = \frac{a}{a + j(k-1)\omega} \left(\frac{1}{s - jk\omega} - \frac{1}{s - j\omega + a} \right)$$

$$y(t) = \frac{a}{a + j(k-1)\omega} (e^{jk\omega t} - e^{-at} e^{j\omega t}) = \frac{ae^{j\varphi}}{\sqrt{a^2 + ((k-1)\omega)^2}} (1 - e^{-at} e^{-j(k-1)\omega t}) e^{jk\omega t}$$

$$\varphi = -\arctan \frac{(k-1)\omega}{a} \quad y_{dq}(t) = e^{-j\omega t} \mathbf{y}(t) = \frac{ae^{j\varphi}}{\sqrt{a^2 + ((k-1)\omega)^2}} (e^{j(k-1)\omega t} - e^{-at})$$

以上の結果より、定常状態を考えれば、中心周波数 ω のバンドパスフィルになっており、 $(k-1)\omega = \pm a \Rightarrow k\omega = \omega \pm a$ の時、入力に対し出力が振幅が $1/\sqrt{2}$ 、位相が $\mp \pi/4$ となることがわかる。また、 $a > 0$ を大きく選ぶほど過渡応答が速くなるが、通過帯域が広がる。 -5ω 、 7ω の高調波を除去し、基本波成分のみを出力したい場合には a をあまり大きく選ぶことはできない。トレードオフを考えると $\omega/2 < a < \omega$ の範囲に選ぶのが適切と思われる。

○第5次と第7次の高調波を dq 軸上で区別する場合

dq 軸上で第5次と第7次を区別するためには高調波の d 軸成分と q 軸成分の両者に着目する必要がある。例えば、次のような伝達関数をもつ2入力2出力のフィルタを通すことによりそれぞれの dq 成分を求めることができる。

$$\frac{a}{s + a - j6\omega}, \quad \frac{a}{s + a + j6\omega}$$

前者が第7次高調波を分離するためのフィルタである。入力を $(x + jy)$ 、出力を $(u + jv)$ で表わすと、次のような関係があり、出力虚部から入力実部への、出力実部から入力虚部へフィードバックをもつ、2入力2出力のフィルタであることがわかる。

$$U(s) + jV(s) = \frac{a}{s + a - j6\omega} (X(s) + jY(s))$$

$$U(s) = \frac{1}{s + a} (aX(s) - 6\omega V(s)), \quad V(s) = \frac{1}{s + a} (aY(s) + 6\omega U(s))$$

また、入力が $x + jy = e^{j6\omega t}$ の場合を考えると、

$$U(s) + jV(s) = \frac{a}{s + a - j6\omega} \frac{1}{s - j6\omega} = \frac{1}{s - j6\omega} - \frac{1}{s + a - j6\omega}$$

従って、

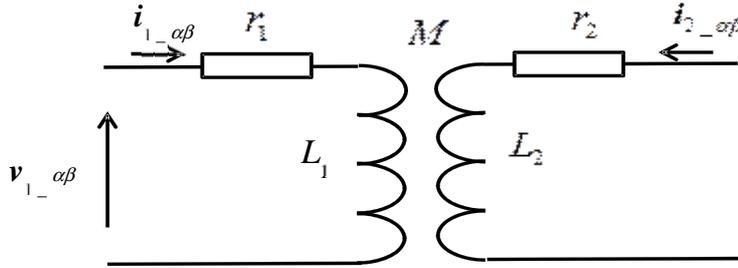
$$u + jv = e^{j6\omega t} - e^{-at} e^{j6\omega t} = e^{j6\omega t} (1 - e^{-at})$$

出力ベクトルは $t=0$ では原点にあるが、時間とともに半径が増加し、入力である半径 1 の回転ベクトルに漸近することがわかる。

5. 誘導電動機の基本式

固定子側の一次巻線について、静止座標 ($\alpha \beta$ 軸) で考えると、次式が成り立つ。

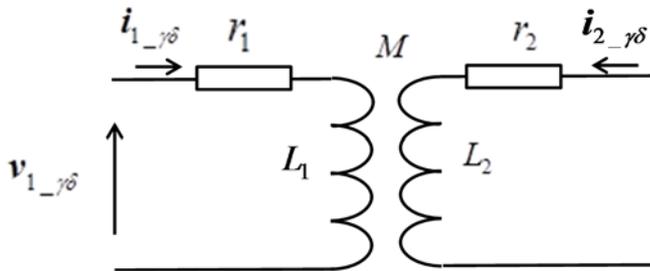
$$\mathbf{v}_{1_ \alpha\beta} = (r_1 + p L_1) \mathbf{i}_{1_ \alpha\beta} + p M \mathbf{i}_{2_ \alpha\beta}$$



注) 電流の方向は何れも相互結合した 2 つに巻線に入る方向 (磁束を強めあう方向) にとって考える。実際には負荷側の電流の方向は逆となるが、計算を分かり易くするためにこの方向とする。なお、定義は自由であり、結果的に解が負となる。

一方、回転子側の二次巻線については、回転子と同期して角速度 ω_m で回転する回転座標系 ($\gamma \delta$ 軸) で考えると、次式が成り立つ。

$$0 = p M \mathbf{i}_{1_ \gamma\delta} + (r_2 + p L_2) \mathbf{i}_{2_ \gamma\delta}$$



さて、同じ空間ベクトルでも、どの座標系から見るかにより、表現 (見え方) が異なる。一次電流の空間ベクトルを考えると、 $\alpha \beta$ 軸から見た空間ベクトル $\mathbf{i}_{1_ \alpha\beta}$ と $\gamma \delta$ 軸から見た空間ベクトル $\mathbf{i}_{1_ \gamma\delta}$ の間には次の関係がある。

$$\mathbf{i}_{1_ \gamma\delta} = e^{-j\omega_m t} \mathbf{i}_{1_ \alpha\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{i}_{1_ \alpha\beta} = e^{j\omega_m t} \mathbf{i}_{1_ \gamma\delta}$$

同様に、 $\mathbf{i}_{2_ \gamma\delta} = e^{-j\omega_m t} \mathbf{i}_{2_ \alpha\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{i}_{2_ \alpha\beta} = e^{j\omega_m t} \mathbf{i}_{2_ \gamma\delta}$ の関係がある。上式に、これらの関係を代入して変形すると、

$$\begin{aligned} 0 &= p M \mathbf{i}_{1_ \gamma\delta} + (r_2 + p L_2) \mathbf{i}_{2_ \gamma\delta} \Rightarrow \\ 0 &= p M (e^{-j\omega_m t} \mathbf{i}_{1_ \alpha\beta}) + (r_2 + p L_2) (e^{-j\omega_m t} \mathbf{i}_{2_ \alpha\beta}) \Rightarrow \\ 0 &= e^{-j\omega_m t} (p - j\omega_m) M \mathbf{i}_{1_ \alpha\beta} + e^{-j\omega_m t} (r_2 + (p - j\omega_m) L_2) \mathbf{i}_{2_ \alpha\beta} \Rightarrow \\ 0 &= (p - j\omega_m) M \mathbf{i}_{1_ \alpha\beta} + (r_2 + (p - j\omega_m) L_2) \mathbf{i}_{2_ \alpha\beta} \end{aligned}$$

従って、 $\alpha \beta$ 座標系から見た誘導機の基本式は次式で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1-\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + pL_1 & pM \\ (p - j\omega_m)M & r_2 + (p - j\omega_m)L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{1-\alpha\beta} \\ \mathbf{i}_{2-\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

変圧器と同じように、二次側を一次に換算することを考える。2列目を k 倍するとともに、二次電流を $1/k$ 倍して変形すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1-\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + pL_1 & pkM \\ (p - j\omega_m)kM & k^2r_2 + (p - j\omega_m)k^2L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{1-\alpha\beta} \\ \mathbf{i}_{2-\alpha\beta}/k \end{bmatrix}$$

等価回路が簡単となるよう、 $k = M/L_2$ と選ぶと

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1-\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + pL_1 & pM^2/L_2 \\ (p - j\omega_m)M^2/L_2 & (M/L_2)^2r_2 + (p - j\omega_m)M^2/L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{1-\alpha\beta} \\ \mathbf{i}_{2-\alpha\beta}/k \end{bmatrix}$$

パラメータを下記のように置き換える。なお、 σ は漏れ係数と呼ばれる。

$$L_m = \frac{M^2}{L_2} = (1 - \sigma)L_1, \quad \ell_1 = L_1 - L_m = \sigma L_1, \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1L_2}$$

$$r'_2 = \left(\frac{M}{L_2}\right)^2 r_2, \quad \mathbf{i}'_{2-dq} = \mathbf{i}_{2-dq} (L_2/M)$$

この時、基本式は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1-\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + p(L_m + \ell_1) & pL_m \\ (p - j\omega_m)L_m & r'_2 + (p - j\omega_m)L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{1-\alpha\beta} \\ \mathbf{i}'_{2-\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

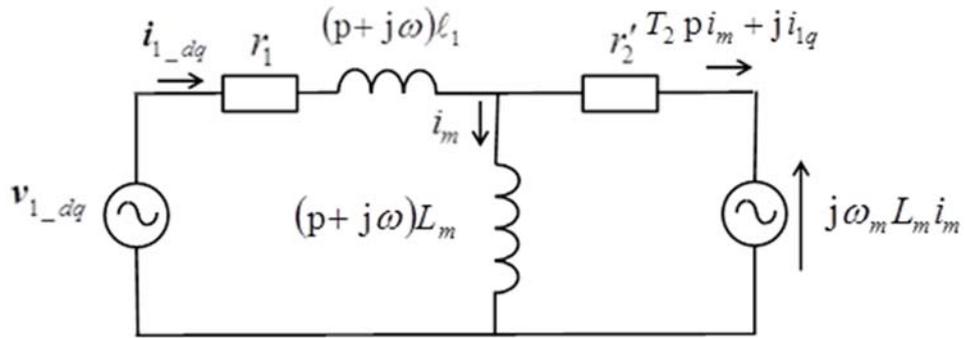
また、 $\mathbf{i}'_{2-\alpha\beta}$ の代わりに、励磁電流 $\mathbf{i}_{m-\alpha\beta} = \mathbf{i}_{1-\alpha\beta} + \mathbf{i}'_{2-\alpha\beta}$ を用いて整理すると、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1-\alpha\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + p\ell_1 & pL_m \\ -r'_2 & r'_2 + (p - j\omega_m)L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{1-dq} \\ \mathbf{i}_{m-\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

この関係式を回転磁界に同期して回転する同期回転座標 (dq 軸) の関係に変換する (形式的に添え字の $\alpha \beta$ を dq に、また、微分演算子 p を $(p + j\omega)$ に置き換えればよい)。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1-dq} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + (p + j\omega)\ell_1 & (p + j\omega)L_m \\ -r'_2 & r'_2 + (p + j(\omega - \omega_m))L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{1-dq} \\ \mathbf{i}_m \end{bmatrix}$$

この関係式を等価回路で表わすと、次のようになる。



過渡時にも適用できる誘導電動機の等価回路

ただし、 T_2 は二次側の回路の時定数であり、 $T_2 = \frac{L_m}{r'_2} = \frac{L_2}{r_2}$